ATTI

DELLA

ACCADEMIA GIOENIA

DI SCIENZE NATURALI

IN CATANIA

ANNO LXXXI

1904

SERIE QUARTA

VOLUME XVII.

CATANIA

C. GALÀTOLA, EDITORE

1904.

ATTI

DELLA

ACCADEMIA GIOENIA

DI SCIENZE NATURALI

IN CATANIA

ANNO LXXXI

1904

SERIE QUARTA

VOLUME XVII.

CATANIA

C. GALÀTOLA, EDITORE

1904.

ACCADEMIA GIOENIA DI SCIENZE NATURALI
IN CATANIA

Cariche Accademiche per l' anno 1903-'904

UFFICIO DI PRESIDENZA

RICCÒ Uff. Prof. ANNIBALE — *Presidente*
CLEMENTI Comm. Prof. GESUALDO — *Vice-Presidente*
GRIMALDI Cav. Prof. GIOVAN PIETRO — *Segretario*
PENNACCHIETTI Cav. Prof. GIOVANNI — *Vice-Segretario per la sezione di Scienze fisiche e matematiche*
FELETTI Cav. Prof. RAIMONDO — *Vice-Segretario per la sezione di Scienze naturali*

CONSIGLIO DI AMMINISTRAZIONE

ZANETTI Prof. CARLO UMBERTO
STADERINI Prof. RUTILIO
PIERI Prof. MARIO
CAFICI Rev. P. D. GIOVANNI
GRASSI Cav. Prof. GIUSEPPE — *Cassiere*
LAURICELLA Prof. GIUSEPPE — *Bibliotecario*

Elenco nominativo dei Soci Onorari, Effettivi e Corrispondenti

Soci Onorari

NOMINATI DOPO L'APPROVAZIONE DEL NUOVO STATUTO

Gemmellaro comm. prof. Gaet. Giorgio
Todaro comm. prof. Francesco
Chaix prof. Emilio
Macaluso comm. prof. Damiano
Cannizzaro gr. uff. prof. Stanislao
Mosso comm. prof. Angelo
Blaserna comm. prof. Pietro
Villari comm. prof. Emilio
Naccari uff. prof. Andrea
Strüver comm. prof. Giovanni
Ròiti uff. prof. Antonio
Cerruti comm. prof. Valentino
Berthelot prof. Marcellino
Grassi cav. prof. Battista
Schiaparelli comm. prof. Giovanni
Wiedemann prof. Eilhard
Cappellini comm. prof. Giovanni
Righi cav. prof. Augusto
Volterra prof. Vito
Delpino prof. Federico
Dini comm. prof. Ulisse
Tacchini comm. prof. Pietro
Ciamician comm. prof. Giacomo
Dohrn comm. prof. Antonio
Briosi comm. prof. Giovanni

Soci Effettivi

1. **Cafici** rev. p. d. Giovanni
2. **Tomaselli** gr. uff. prof. Salvatore
3. **Clementi** comm. prof. Gesualdo
4. **Orsini Faraone** prof. Angelo
5. **Basile** prof. Gioachino
6. **Capparelli** uff. prof. Andrea
7. **Mollame** cav. prof. Vincenzo
8. **Aradas** cav. prof. Salvatore
9. **Di Sangiuliano** march. gr. uff. Ant.
10. **Ughetti** cav. prof. Giambattista
11. **Fichera** uff. prof. Filadelfo
12. **Feletti** cav. prof. Raimondo
13. **Pennacchietti** cav. prof. Giovanni
14. **Petrone** uff. prof. Angelo
15. **Riccò** Uff. prof. Annibale
16. **Curci** cav. prof. Antonio
17. **Bucca** prof. Lorenzo
18. **Grimaldi** cav. prof. Giov. Pietro
19. **Grassi** cav. prof. Giuseppe
20. **Di Mattei** uff. prof. Eugenio
21. **D' Abundo** prof. Giuseppe
22. **Lauricella** prof. Giuseppe
23. **Zanetti** prof. Carlo Umberto
24. **Pieri** prof. Mario
25. **Staderini** prof. Rutilio
26. **Cavara** prof. Fridiano
27. **Russo** prof. Achille
28. **Perrando** prof. Gian Giacomo
29. **Fubini** prof. Guido
30. . . . .

Soci Effettivi

DIVENUTI CORRISPONDENTI PER ALLONTANAMENTO DI RESIDENZA

Speciale prof. Sebastiano
Stracciati prof. Enrico
Peratoner prof. Alberto
Leonardi gr. uff. avv. Giovanni *
Ricciardi uff. prof. Leonardo
Chizzoni ing. prof. Francesco
Baccarini prof. Pasquale
Mingazzini cav. prof. Pio

Soci Corrispondenti

NOMINATI DOPO L' APPROVAZIONE DEL NUOVO STATUTO

Pellizzari prof. Guido
Maggi cav. prof. Giovanni Antonio
Martinetti prof. Vittorio
Meli prof. Romolo
Papasogli prof. Giorgio
Condorelli Francaviglia dott. Mario
Pisani dott. Rocco
Bassani cav. prof. Francesco
Gaglio cav. prof. Gaetano
Moscato dott. Pasquale
Guzzardi dott. Michele
Alonzo dott. Giovanni
Distefano dott. Giovanni
Cozzolino uff. prof. Vincenzo
Magnanini prof. Gaetano
Sella prof. Alfonso
Pagliani cav. prof. Stefano
Chistoni cav. prof. Ciro
Galitzine Principe Boris
Battelli cav. prof. Angelo
Guglielmo prof. Giovanni
Cardani cav. prof. Pietro
Garbieri cav. prof. Giovanni
Giannetti cav. prof. Paolo
Cervello comm. prof. Vincenzo
Albertoni cav. prof. Pietro
La Monaca dott. Silvestro
Luciani comm. prof. Luigi
Zona cav. prof. Temistocle
Bazzi prof. Eugenio
Chirone cav. prof. Vincenzo
Marselli prof. Enrico
Raffo dott. Guido
Materazzo dott. Giuseppe
Borzì cav. prof. Antonio
Falco dott. Francesco
Del Lungo prof. dott. Carlo
Giovannozzi prof. Giovanni
Kohlrausch prof. Giovanni
Zambacco dott. N.
Donati prof. Luigi
De Heen prof. Pietro
Pernice prof. Biagio
Caldarera dott. Gaetano
Salomone Marino prof. Salvatore
Pandolfi dott. Eduardo
Lo Bianco dott. Salvatore
Guzzanti cav. Corrado
Valenti prof. Giulio
Majorana dott. Quirino
Boggio-Lera prof. Enrico
Lo Priore prof. Giuseppe
Pinto prof. Luigi
Romiti prof. Guglielmo

* Divenuto socio corrispondente per dimissione dal grado di effettivo.

Dott. S. DI FRANCO

Studio cristallografico sull' Ematite dell' Etna

(con due tavole)

Tra i minerali dell' Etna, l' Ematite è quella che attira di più l'attenzione per il perfetto stato di conservazione, la bellezza delle forme cristalline, e per la sua discreta frequenza.

Essa si trova in quasi tutte le lave; sia antiche, sia recenti; per lo più in sottilissime laminette luccicanti che tappezzano le cavità o le spaccature di esse, però in poche località soltanto è in tale stato da permettere uno studio cristallografico, cioè: al Monte Calvario e al Monte Corvo presso Biancavilla, alla Serra *Curigghiuni* nella valle del Bove, alla *Scalazza* presso Acireale, nella contrada Reitana nel comune di Aci Catena, nelle lave recenti del 1669 dei Monti Rossi presso Nicolosi, e in quelle delle eruzioni del 1852, del 1865 e del 1879.

Il Dolomieu (1) nel suo catalogo dei prodotti dell'Etna accennò la presenza dell' Ematite dei Monti Rossi, col nome di Ferro specolare e senza descriverne la forma; delle altre provenienze non fece menzione alcuna, forse perchè in quel tempo non erano ancora conosciute.

Nel 1831 il Maravigna (2) nella sua terza memoria, parlando della famigia dei Sideriti, si occupò del Ferro Oligisto dei Monti Rossi e di Monte Calvario.

Egli a proposito dei cristalli dei Monti Rossi dice essere

---

(1) DOLOMIEU — *Mémoire sur les iles Ponces et catalogue raisonné des produits de l'Etna.* Paris. 1788.

(2) MARAVIGNA — *Materiali da servire alla redazione della Orittognosia Etnea*—Atti dell' Acc. Gioenia, Ser. I. Vol. VIII. 1834, pag. 25.

questo il luogo soltanto che presenta la forma determinabile (trapezoedrica secondo Haüy) mentre quelli di Monte Calvario sono costituiti da larghe lamine.

Dal nostro studio invece si rileva come l' Ematite di Monte Calvario offre diverse forme di cristalli oltre quella laminare.

Lo stesso Maravigna (1), studiando nel 1835 il Ferro Oligisto di Monte Corvo, che s' eleva pure nel territorio di Biancavilla, vi osservò oltre le lamine rombiche anche cristalli di forma ottaedrica (Martite, Magnoferrite o forma mimetica della stessa Ematite), di cui avremo occasione di occuparci in un altro nostro lavoro.

Lasaulx (2) con idee più moderne si occupò anche della Ematite di Monte Calvario.

Più recentemente il Prof. L. Bucca (3) in una nota preventiva annunziò il ritrovamento di Ematite nella nuova località detta la Reitana, presso Aci Catena (Etna).

Questo minerale dell' Etna merita in modo speciale uno studio cristallografico, per lo splendore dei suoi cristalli e per la sua genesi; e l' esame dei numerosi esemplari posseduti dal Museo di Mineralogia e Vulcanologia della R. Università di Catania offre qualche cosa che, a mio giudizio, merita di essere presa in considerazione.

Oltre ad uno studio cristallografico dettagliato delle forme, combinazioni e geminati dell' Ematite dell' Etna, ho fermata la mia attenzione alle differenze morfologiche con quella del Vesuvio e dello Stromboli.

Intorno l' Ematite di origine vulcanica molte sono le ricerche fatte da valenti Mineralisti; dei nostri ci contentiamo citare:

---

(1) MARAVIGNA — *Cenno sul Ferro Oligisto ottaedrico del monte del Corvo* — Atti della Acc. Gioenia Ser. I. Vol. XI. 1836, p. 307.

(2) LASAULX-WALTERSHAUSEN — *Der Aetna* — Vol. II, Leipzig, 1880, pag. 485.

(3) BUCCA — *Sopra una nuova località di Ferro Oligisto dell' Etna* — Atti dell' Acc. Gioenia. Ser. IV, Vol. VI, 1893, Memoria V.

A. Scacchi (1) che studiò i cristalli del Vesuvio, e Strüver (2) quelli dello Stromboli.

In questo mio studio non ho creduto intrattenermi sulla parte storica generale delle cognizioni scientifiche sull' Ematite, per le quali rimando al lavoro dello Strüver (3), perchè mi sarei allontanato dal tema.

I migliori campioni, che permettono un esame cristallografico, si trovano a Monte Calvario: recentemente gli scavi per le acque del Marchese di Casalotto fatti nelle lave presso Aci Catena misero in evidenza un ricco giacimento di bellissimi cristalli. Da questo proviene una lamina che misura più di 9 cm. di lunghezza per 3 cm. di larghezza e per uno spessore di 2 mm. la quale fa parte della collezione del già citato Museo.

Descrizione delle forme osservate.

Il Ferro Oligisto dell' Etna è povero di forme riunite in poche combinazioni; si riscontra frequentemente in geminati.

Delle forme osservate sono frequentissime:

c	r	e	
{111}	{100}	{110}	Miller
{0001}	{$10\bar{1}1$}	{$01\bar{1}2$}	Bravais
$0R$	R	$-\frac{1}{2}R$	Naumann
a^1 —	p	b^1	Lévy

---

(1) Scacchi Arcangelo — *Contribuzioni mineralogiche per servire alla storia dell' incendio Vesuviano del mese di Aprile 1872* — Atti della R. Acc. di Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli Vol. VI, 1874.

(2) Strüver — *Ematite di Stromboli* — Atti della R. Acc. dei Lincei, Ser. IV. Volume VI, 1889.

(3) Strüver — *Ematite di Traversella* — Atti della R. Acc. di Torino 1872. 7, 377.

meno frequenti :

a	n	
$\{10\bar{1}\}$	$\{31\bar{1}\}$	Miller
$\{01\bar{1}2\}$	$\{22\bar{4}3\}$	Bravais
$\infty P2$	$\frac{1}{3}P2$	Naumann
d^1	e_3	Lévy

Due volte soltanto mi fu dato osservare la faccettina dello scalenoedro $\{20\bar{1}\}$ v. Fig. 1.

Tutti i cristalli sono lamellari, essendovi sviluppatissima la base $\{111\}$; lateralmente alle lamelle compaiono: le facce del romboedro fondamentale $\{100\}$; quelle del romboedro inverso $\{110\}$; alle quali raramente si associano le facce del prisma $\{10\bar{1}\}$ e della piramide esagonale $\{31\bar{1}\}$.

Le forme cennate dal Lasaulx per l' Ematite dell' Etna sono le seguenti :

$$0R\{0001\},\ R\{10\bar{1}1\},\ -\frac{1}{2}R\{01\bar{1}2\},\ \infty P2\{1120\},\ \frac{1}{3}P2\{22\bar{4}3\},$$
$$-R\{0\bar{1}11\},\ -2R\{0221\},\ -\frac{1}{6}R\{01\bar{1}6\},\ \frac{2}{3}P2\{11\bar{2}3\},\ -\frac{1}{5}R^3\{21\bar{3}5\}\ (*)$$
$$\frac{2}{5}R^3\{6\bar{2}\bar{4}5\}:$$

che secondo la notazione di Miller, da noi usata in questo lavoro, verrebbero :

$$0R\{111\},\ R\{100\},\ -\frac{1}{2}R\{110\},\ \infty P2\{101\},\ \frac{4}{3}P2\{31\bar{1}\},\ -R\{22\bar{1}\},$$
$$-2R\{111\},\ -\frac{1}{6}R\{774\},\ \frac{2}{3}P2\{210\},\ -\frac{1}{5}R^3\{320\},\ \frac{2}{5}R^3\{51\bar{1}\}.$$

(*) Il Lasaulx riporta lo scalenoedro positivo $\frac{1}{5}R^3$, ma Goldschmidt (*Krystallformen der Mineralien*) spiega come il Kokscharow per il primo desse il valore positivo, mentre dalle sue figure emerge chiaramente trattarsi dello scalenoedro negativo, e i successivi autori, compreso il Lasaulx, riportarono sempre il valore positivo.

Con le prime cinque forme concordano quelle da me trovate.

La forma {201} non fu menzionata dal Lasaulx.

Secondo quanto ci riferisce il Lasaulx, queste forme furono determinate colle zone e senza misure ad eccezione di $-\frac{1}{6}R$ {01$\bar{1}$6} che comparisce, specialmente in alcuni geminati, sopra la $-\frac{1}{2}R$ {00$\bar{1}$2}, in alternanza oscillatoria formante un arrotondamento dello spigolo tra le dette facce e la base; e senza avere sicuri riflessi. Come media di 8 letture ebbe per angolo tra la base e il romboedro da determinare 14°30', per angolo tra questo e il $-\frac{1}{2}R = 23°42$.

Gli angoli calcolati sarebbero stati:

$$-\frac{1}{6}R : \quad 0R \quad = 14°\ 42'\ 19''$$

$$-\frac{1}{6}R : -\frac{1}{2}R = 29°\ 32'\ 41''$$ (*)

Però il Lasaulx non dà nè i valori angolari delle forme osservate, nè le costanti cristallografiche.

I pochi disegni di cristalli, da lui riportati, non permettono neppure di vedere la posizione di tutte le facce indicate come esistenti nell' Ematite di Monte Calvario, presso Biancavilla: e noi abbiamo dovuto tacere di talune per non averle incontrate una sola volta e perchè anche si allontanano dal tipo comune delle altre Ematite vulcaniche, in generale poco ricche di forme.

Von Rath su di un cristallo geminato di Ematite dello Stromboli del Museo di Mineralogia di Berlino descrisse e raffigurò le seguenti forme:

{111}, {100}, {110}, {31$\bar{1}$}, {332}, {21$\bar{1}$}, {332}

(*) Secondo Goldschmidt l'esistenza di questa forma $-\frac{1}{6}R$ non è dimostrata.

però, gli studj dello Strüver, fatti sopra parecchie centinaia di esemplari, semplici e geminati dello Stromboli, hanno provato riscontrarsi soltanto le forme:

$$\{111\},\ \{100\},\ \{110\},\ \{10\bar{1}\}.$$

con che concorda perfettamente il disegno dato dal Lévy, pei cristalli appunto dello Stromboli, e coi campioni che ci è stato dato di potere osservare nella collezione di Mineralogia dell'Università di Catania.

Anche i cristalli di Ematite del Vesuvio presentano le stesse forme da me riscontrate nell' Ematite dell' Etna, compreso lo scalenoedro $\{20\bar{1}\}$ che si mostra, secondo le osservazioni dello Scacchi, assai minuto e poche volte ben distinto.

Lo Scacchi, poi, tra le facce della bipiramide esagonale $\{31\bar{1}\}$ e quelle del romboedro $\{100\}$ trovò una serie *m* di faccette definite dai simboli $(14\bar{1})$, $(15\bar{1})$, $(16\bar{1})$ ecc. senza però considerarle come realmente esistenti, non essendo, secondo come ci riferisce egli stesso, facile decidere se la differenza nelle inclinazioni trovate sia dovuta all' esistenza di particolari specie di faccette, o se invece sia conseguenza della poliedria di *m*. Lo stesso dicasi per gli spigoli formati dalle facce di $\{31\bar{1}\}$ e da quelle del prisma esagonale $\{10\bar{1}\}$ in cui vi sono altre faccette, serie *k*, di rado ben distinte, e facendo osservare essere la loro esistenza soltanto probabile.

Riassumendo, possiamo fare il seguente confronto colle forme riscontrate nei cristalli di Ematite dell' Etna, dello Stromboli e del Vesuvio:

Forme	$\{111\}$,	$\{100\}$,	$\{10\bar{1}\}$,	$\{110\}$,	$\{31\bar{1}\}$,	$\{20\bar{1}\}$.
Etna (Di Franco)	+	+	+	+	—	+
Stromboli (Strüver)	+	+	+	+	—	—
Vesuvio (Scacchi)	+	+	+	+	+	+

Le combinazioni osservate nei cristalli di Ematite dell' Etna sono :

1) $\{111\}$ $\{100\}$

2) $\{111\}$ $\{100\}$ $\{10\bar{1}\}$

3) $\{111\}$ $\{100\}$ $\{110\}$

4) $\{111\}$ $\{100\}$ $\{110\}$ $\{101\}$

5) $\{111\}$ $\{100\}$ $\{10\bar{1}\}$ $\{31\bar{1}\}$

6) $\{111\}$ $\{100\}$ $\{110\}$ $\{31\bar{1}\}$

7) $\{111\}$ $\{100\}$ $\{101\}$ $\{201\}$

8) $\{111\}$ $\{100\}$ $\{110\}$ $\{10\bar{1}\}$ $\{3\bar{1}\bar{1}\}$

La combinazione (8) è la più completa dei cristalli di Ematite dell' Etna e l' ho riscontrata in alcuni esemplari di Monte Calvario presso Biancavilla.

Tipi di combinazioni dei cristalli.

I tipi di combinazioni dei cristalli dell' Ematite dell' Etna sono pochi, anzi possono ridursi ai seguenti : tipo lamellare, romboedrico, piramidato e prismatico.

a) Il tipo più frequente è il lamellare delimitato dalle facce del romboedro $\{100\}$ e dell' inverso $\{110\}$.

Più volte ho esaminata la nostra Ematite in laminette di estrema sottigliezza, poco elastiche e fragilissime.

Tra i campioni di Biancavilla e d' Aci Catena della collezione generale del Museo di Mineralogia e Vulcanologia della R. Università di Catania, rinvenni isolate in una specie di detrito vulcanico alcune laminette di forme regolari e degne d'una

particolare menzione, non trovandone cenno alcuno nelle memorie dei diversi autori che hanno studiato l' Ematite.

Sono, cioè, delle laminette triangolari equilatere, i cui spigoli misurano dai 2 ai 6 mm.

Le superficie presentano delle finissime strie ondulate; soltanto in una laminetta mi fu dato di osservare delle strie parallele ad uno degli spigoli, ciò che indurrebbe a riferire queste alla posizione del romboedro inverso.

Nel detrito vulcanico di Aci Catena le laminette di Ematite hanno forma rombica (con spigoli dai 3 ai 6 mm.) dovuta allo sviluppo di due soli lati del romboedro. Le superficie presentano una striatura pennata.

Queste laminette per la estrema sottigliezza non presentano agli spigoli alcuna faccetta apprezzabile.

In Aci Catena l' Ematite si è presentata spesso in lamine di discrete dimensioni (sino a cm. 9 di lunghezza per 3 cm. di larghezza).

Innumerevoli laminette sono impiantate sulla lava ed anche sulla faccia di base dei cristalli più grandi.

I cristalli laminari della Reitana (Aci Catena) e di Monte Calvario (Biancavilla) non mostrano alcuna differenza.

Tra i cristalli appartenenti a questo tipo dobbiamo annoverare delle laminette esagonali, le quali, esaminate attentamente, non offrono che facce laterali di romboedro fondamentale: esse debbono considerarsi come geminati.

La geminazione non è visibile, ma talora è svelata dalla striatura sulla base che corre parallelamente agli spigoli, come rilevasi dalla Fig. 2; queste laminette non di rado mostrano le faccette del romboedro (v. Fig. 3) e certe volte anche quelle del prisma.

b) Il tipo romboedrico è frequente ed abbondante tra i cristalli di Ematite dell' Etna (v. Fig. 4, 5, 6 e 7).

Il cristallo della Fig. 7, proiettato sulla faccia di base, è un cristallino romboedrico di forme regolari, completo e che si avvicina all' ideale sviluppo d' un cristallo modello.

Di questi cristalli se ne osservano parecchi tra i numerosissimi campioni, ma alcuni, per trovarsi impiantati, non mostrano il loro completo sviluppo.

Quando due facce parallele sono più lunghe delle altre, allora si ha il cristallo rappresentato dalla Fig. 8.

c) I cristalli appartenenti al tipo piramidato sono meno frequenti; essi sono ricchi di facce, relativamente agli altri tipi. In alcuni la base è molto ridotta; in altri lo spessore è minimo tra le basi (v. Fig. 9), e fanno osservare la faccia di base in combinazione con $\{100\}$, $\{110\}$, $\{101\}$, $\{31\bar{1}\}$.

Anche il cristallo impiantato sulla lamina della Fig. 10 appartiene a questo tipo ed ha le stesse combinazioni osservate nel cristallo della Fig. 9.

d) Il tipo prismatico è il più raro. Appartiene a questo tipo il cristallo della Fig. 1. I cristalli rappresentati dalle Fig. 10 e 11, somiglianti ai cristalli di Ematite dello Stromboli (vedi Fig. 2 della tavola annessa allo studio cristallografico dello Strüver), sebbene geometricamente appartengano al tipo prismatico, cristallograficamente se ne allontanano, dappoichè la lunghezza dei cristalli risulta dallo sviluppo della base e dei romboedri $\{100\}$, $\{110\}$.

Il cristallo della Fig. 13 può appartenere contemporaneamente tanto al tipo romboedrico quanto al tipo prismatico.

Aspetto fisico delle facce.

Tutti i cristalli di Ematite dell' Etna, per il predominio della base, costituiscono delle tavolette di discrete dimensioni (sino a 12 a 15 cm. di lunghezza per 5 a 6 di larghezza), restandone sempre minimo lo spessore, che rare volte supera un millimetro, e nel quale si svolgono tutte le altre facce osservate.

Negli individui più minuti la forma del cristallo è assolutamente lamellare, presentandosi in squamette esagonali o trian-

golari, nelle quali soltanto al microscopio si scoprono le faccette laterali inclinate del romboedro (v. Fig. 3).

Lo sviluppo della faccia di base nell'Ematite dell'Etna, ha richiamato la mia attenzione sulla striatura e su altre accidentalità che vi si presentano.

È sempre visibile una striatura secondo le tre direzioni del romboedro inverso che si tagliano a 60^0. Tale striatura è palesemente dovuta alla sovrapposizione sulla faccia di base di strati di sostanza a contorno triangolare; e con conveniente illuminazione si osserva che a queste striature corrispondono delle faccette sottilissime ed allungate del romboedro.

Nelle lamine larghe è possibile riscontrare varii di questi rilievi (v. Fig. 14 sino a 21); i quali, però, alle volte si estendono non poco secondo uno dei lati del romboedro (1) e si ripete la striatura per lungo, presentando le estremità più o meno ben conservate.

Altre volte la striatura a contorno triangolare si ripete tanto da determinare una piramide triangolare tronca (v. Fig. 17) o parecchie piramidi tronche sovrapposte (v. Fig. 18). Sulle piramidette spesso è impiantato un cristallino in geminazione col cristallo principale secondo la legge « piano di geminazione una faccia di {100} » (v. Fig. 14, 19, 21).

In diversi cristalli si è verificato il fatto che le striature sono incurvate, determinando una base triangolare curvilinea con le faccette convesse della piramidetta (v. Fig. 19, 20, 21).

Gli stessi rilievi (piramidali) presentano l'Ematite di M. Hargitta, appartenenti secondo Schmidt (2) ad uno scalenoedro negativo $\left(\varkappa\, P\, \frac{11}{10}\right)$.

Dal nostro studio invece risulta: i rialzi dell' Ematite dell' Etna essere costituiti da faccette romboedriche, i cui spigoli

(1) Come nelle forme dentritiche dell'Ematite dello Stromboli, vedi Fig. 19 e 20 del citato lavoro dello Strüver.

(2) SCHMIDT A. — Groth' s Zeitschr. VII, 1882, pag. 549.

possono mostrarsi troncati con faccette corrispondenti ad un romboedro diretto (v. Fig. 15, 20, 21) e raccordarsi all'apice con una faccetta parallela alla base del cristallo principale (v. Fig. 20) (1). Ad ogni modo, per i cristalli di Ematite dell'Etna questa convessità delle faccette non tende mai a trasformare gradatamente l'abito romboedrico dei cristalli nell'abito scalenoedrico.

Sulla faccia di base del Corindone di Yogo Gulch (Montana, S. U. N. A.) recenti studii di J. H. Pratt (2) hanno mostrato figure di romboedri a facce curve identiche a quelle trovate nella nostra Ematite; però non sono rilievi della sostanza, ma cavità (cristalli negativi).

Sulla base della forma lamellare dell'Ematite dell'Etna frequentemente si trovano impiantati altri individui, meno estesi per la base, ma più ricchi di facce.

Il frammento disegnato nella Fig. 22 mostra le multiformi e variabili striature della parte superiore della lamina, in cui sporge un cristallo inclinato colla solita geminazione e formato dalla base, dal romboedro diretto {100}, dall' inverso {110}, dal prisma {101} e dalla piramide esagonale {311}.

Alcuni campioni presentano i cristalli più piccoli incastrati sulla faccia di base, in modo da attraversarla e da sporgere fuori della base inferiore.

Oltre a ciò i cristalli di Ematite dell'Etna presentano sulla base delle lamelle aggruppate a rosetta, del tutto simili a quelle che si osservano sull' Adularia del S. Gottardo.

Questo curioso aggruppamento di cristalli non fermò l'attenzione dei mineralisti (Maravigna, Lasaulx) che si occuparono dell' Ematite di Monte Calvario.

I gruppi a rosa risultano da un particolare modo di asset-

(1) Una tendenza a queste facce curve del romboedro fondamentale coll'accenno a facce scalenoedriche, e colla formazione di faccette di romboedro inverso e di base può spesso osservarsi anche nei cristalli di Ematite dell' Isola d' Elba.

(2) PRATT. J. H. — *On the Crystallography of the Montana Sapphires* — American journal of Science. Vol. IV. December 1897. p. 121.

tamento delle singole lamelle, esse si dispongono a spirale: talora la spirale si ripete diverse volte attorno ad un centro.

I cristalli che costituiscono questi aggruppamenti sono riuniti secondo leggi cristallografiche; e hanno le faccette orientate come se ubbidissero ad un centro di attrazione; le faccette, osservate anche ad occhio nudo, si vede che sono sensibilmente concave.

Infine, tra i cristalli di Monte Calvario si trovano certi aggruppamenti a gradinata, dei quali ho curato copiarne uno, (v. Fig. 13), molto analoghi a quelli dell' Ematite del Vesuvio.

Calcolo delle costanti.

Nei cristalli di Ematite dell'Etna e specialmente nei campioni provenienti dal Monte Calvario presso Biancavilla, la faccia del romboedro fondamentale è frequente, anzi domina quasi sempre.

Le facce di questi cristalli spesso mostrano depressioni a gradinate; questa formazione scalariforme, detta più propriamente a tramoggia, si osserva sovratutto nelle facce del romboedro {100}, e si spiega ammettendo una maggiore rapidità di accrescimento secondo certe date direzioni (v. Fig. 23.)

L'angolo (100):(111) nell' Ematite dell' Etna dalla media di molte misure risulta 57° 38′ 30″.

Meno frequente è la faccia del romboedro inverso (110) che comparisce quale troncatura dello spigolo $(31\bar{1})$ e fa un angolo con (111) di 38° 14′ 10″.

La faccia di prisma $(10\bar{1})$ è ben distinta, nella maggioranza dei casi si presenta assai limitata.

Più rara è la faccia della piramide esagonale (311) essa fa con (111) un angolo di 61° 15′ 20″.

In quanti cristalli di Ematite dell' Etna che ho esaminati, due volte soltanto mi fu dato osservare una faccettina, troncatura

dello spigolo (100). (101), la quale potrebbe riferirsi allo scalenoedro {20$\bar{1}$} (v. Fig. 1), però non ho potuto confermare ciò con la misura di angoli, essendo impossibile ottenere sicuri riflessi.

L'angolo del romboedro varia secondo gli autori.

Troviamo, però, che i più, come Lévy, Dufrenoy, Miller, Phillips, Dana, Scacchi, concordano nel dare 86°10'; invece altri offrono dati diversi: così Breithaupt 85° 56'; Mohs, Haidinger e Hausmann 85° 58'; Delafosse, Kokscharow e Naumann 86°; Haüy 87° 9'.

Nell' Ematite dell' Etna l'angolo delle facce del romboedro è stato da noi trovato 85° 52'.

Angolo		Misurati	Calcolati
e : r	111 : 100	57° 38' 30"	*
e : e	111 : 110	38 14 10	38° 16' 18"
e : n	111 : 31$\bar{1}$	61 15 20	61 14 36
e : a	111 : 10$\bar{1}$	89 58 30	90
r : a	100 : 10$\bar{1}$	43 3 20	42 59 2
a : n	10$\bar{1}$: 31$\bar{1}$	28 43 30	28 45 24
a : a	10$\bar{1}$: 1$\bar{1}$0	59 58 18	60
r : e	100 : 110	47 4 0	47 0 58
r : n	100 : 31$\bar{1}$	26 3 0	25 58 43
r : e'	100 : 0$\bar{1}\bar{1}$	84 2 46	84 1 42

$a : c = 1 : 1,36684$

Sin'oggi non erano state calcolate le costanti cristallografiche dell' Ematite dell' Etna.

Delle costanti cristallografiche dell' Ematite del Vesuvio e dello Stromboli, per metterle in relazione con il valore da me ottenuto non ho trovato nessun dato nei lavori già citati dello Scacchi e dello Strüver.

Le costanti cristallografiche trovate dai seguenti autori per altre provenienze di Ematite sono:

Kokscharow	: 1,365476	(1)
Miller	: 1,3594	(2)
A. Schmidt	: 1,367	(3)
H. Vater	: 1,3642	(4)

Il valore calcolato da Schmidt si avvicina di molto al valore da me trovato nei cristalli di Ematite dell' Etna.

Geminati.

Mentre nell' Ematite dell'Elba le associazioni parallele sono frequentissime, in quella dell'Etna (come del resto anche in quella dello Stromboli e del Vesuvio) sembra essere un caso assai raro, perchè tra le centinaia di campioni osservati non mi fu dato di riscontrarne alcuna.

Frequenti sono invece gli aggruppamenti irregolari, per i quali sarebbe troppo audace volere stabilire delle leggi di geminazione, variabili per ogni coppia d' individui e senza che si ripetano due sole volte.

I geminati dell'Ematite dell'Etna possono presentarsi: o con egnale sviluppo dei singoli individui dell' aggruppamento, o con straordinario sviluppo di uno rispetto all'altro, in modo di trattarsi di un semplice impianto di piccoli individui sopra uno grande, il quale è costantemente di forma tabulare.

(1) Kokscharow — Mat. zur Min. Russl. 1, 3, 1853.
(2) Miller — Min. — 1852 p. 236.
(3) Schmidt A. — Groth's — Zeitschr 1882, p. 548
(4) Vater H. — Groth's — Zeitschr. 1885, p. 391.

Nei cristalli di Ematite dell' Etna ho incontrato le seguenti leggi di geminazione:

Asse di geminazione normale ad una faccia del prisma {2 $\bar{1}$ $\bar{1}$}.

Asse di geminazione la normale ad una faccia del romboedro {100}.

Geminati, che, secondo la descrizione del Prof. Strüver (1), presentino riunite in uno stesso gruppo le due leggi, per quanto attento ed accurato fosse stato il mio esame, non mi fu dato di riscontrarne nell' Ematite dell' Etna.

Nei cristalli laminari i geminati seguono generalmente la prima legge, invece nei piccoli cristalli impiantati è di norma la seconda; negli aggruppamenti di piccoli individui predomina or l' una or l' altra legge.

Quando diversi individui geminati presentano comune la base, non è sempre possibile delimitarli servendosi della direzione delle striature in quella faccia, perchè concordanti in tutti al romboedro {110}; soltanto qualche volta ciò è possibile, quando un individuo intermedio si presenta libero di striature o queste vi sono appena accennate.

Nella Fig. 24 abbiamo rappresentato un geminato apparentemente somigliante ad un cristallo semplice.

I geminati raffigurati nelle Fig. 25, 26 e 27 e proiettati sulle facce di base, risultano dalla riunione di tre o quattro cristalli disposti in modo da fare angoli di 120° e di 60°; questi geminati pigliano talora l' aspetto di coda di rondine.

I geminati delle Fig. 24 e 26 sono analoghi a quelli trovati da Scacchi al Vesuvio e da Strüver allo Stromboli.

Altre volte, come nelle Fig. 26 e 27, l'aspetto si allontana completamente da quello dell' Ematite di origine vulcanica; tali aggruppamenti si sono trovati sin' oggi esclusivamente all' Etna, e precisamente a Monte Calvario.

---

(1) STRÜVER — *Ematite di Stromboli*. Atti della R. Acc. dei Lincei. Ser. IV, Vol. VI. 1889.

In minor numero si osservano i geminati appartenenti alla seconda legge (Vedi Fig. 28. 29).

Questa legge fu indicata per la prima volta da Haidinger (1) nel trattato di Mineralogia del Mohs, sopra i cristalli di Ematite dell' Elba; poscia da Breithaupt, Hessemberg e altri, e verificata dal Lasaulx (2), dal von Rath (3) e da Strüver (4) anche sopra i cristalli di origine vulcanica.

I singoli geminati in tal caso sono impiantati sulla base di un grande individuo lamellare con inclinazioni diverse, che non permettono di potere stabilire un'altra legge di geminazione, tra i piccoli individui e il grande che li sopporta.

I piccoli individui talora compaiono diversi, disposti parallelamente in serie, oppure allineati formando delle listicine; in tutti e due i casi si dispongono secondo la direzione delle striature della base dell'individuo di sostegno.

La Fig. 28 rappresenta un gemello della combinazione $\{111\}$, $\{100\}$, $\{110\}$, $\{101\}$, $\{311\}$ in cui le facce simmetriche sono egualmente sviluppate.

Di questi geminati tra i numerosissimi campioni ne incontrai parecchi, distinti dalle faccette molto splendenti.

Un geminato somigliante al precedente, ma meno ricco di facce, è rappresentato dalla Fig. 29, però le facce dei due individui non hanno uguale sviluppo.

Dal Laboratorio di Mineralogia della R. Università di Catania.

---

(1) *Treatise on Mineralogy — Translated from the German, with considerable additions by* W. HAIDINGER — Edinburg. 1825, 8°, Vol. II. p. 106.

(2) l. c.

(3) Pogg. Ann. vol. 128, p. 430. 31.

(4) STRÜVER — *Ematite di Stromboli* — Atti della R. Accademia dei Lincei Ser. IV Vol. VI. 1889.

Intorno alla « Ruggine bianca » dei limoni [1]

Osservazioni e ricerche

di

F. CAVARA e N. MOLLICA.

(Comunicazione fatta alla Accademia Gioenia il 17 Marzo 1903).

Fin dall' aprile dell' anno scorso, l' Egregio Prof. Bufalini, Direttore della cattedra ambulante di Agricoltura di Reggio Calabria, si rivolgeva alla direzione dell' Orto Botanico di Catania per lo studio di una malattia dei limoni, la quale fin dal 1901, aveva fatto la sua comparsa nel territorio della provincia di Reggio, e sopratutto a Scilla, ove alcuni giardini erano stati fortemente danneggiati.

Il suddetto professore, inviò all' uopo alcuni limoni per gli opportuni esami, ed aggiungeva che: « .... le piante colpite, in breve tempo rimangono prive delle foglie, ed i nuovi germogli spuntano stentatamente, come nelle viti affette fieramente dalla Peronospora. »

Il carattere infettivo della malattia gli risultava abbastanza evidente dal modo di diffusione e dal decorso di essa. D'altra parte, egli faceva notare che gli aranci che crescevano a brevissima distanza dai limoni infetti, in quei giardini, erano pressocchè immuni. Il prof. Bufalini poi riferiva che a Pa-

(1) La *ruggine degli agrumi* è nota da tempo per gli agrumeti Americani; almeno questo ci consta da quanto ne riferisce il Chiarissimo Prof. Penzig nella sua pregevolissima opera « *Studi botanici sugli agrumi e sulle piante affini* » in *Annali di Agricoltura* del Ministero Roma 1887, con un atlante di tavole — Però l'agente di essa, essendo diverso, può darsi che si tratti di affezione anche alquanto differente.

lermo, nella villa del Sindaco Tasca, aveva potuto osservare la stessa malattia, per quanto in piccole proporzioni.

I caratteri, offerti dai limoni infetti inviatici in esame, ci indussero anche a fare una ispezione a qualche agrumeto di Catania, e precisamente ad un vasto giardino, di proprietà dei Fratelli Mollica, a Cannizzaro. Ora anche in questo ci fu dato riscontrare qualche manifestazione di tale malattia, per quanto con carattere di sporadicità.

Dopo avere condotto a buon punto le ricerche di laboratorio, stimammo opportuno di fare una visita anche agli stessi giardini di Reggio Calabria, sui quali il Prof. Bufalini aveva richiamata la nostra attenzione. Ciò ebbe luogo nel novembre scorso, mercè la di lui cortese ed intelligente assistenza.

Egli ci condusse precisamente a Scilla, nei giardini del Sig. Minasi, che da quanto ci era stato riferito, erano i più colpiti, ed ove potemmo raccogliere dati assai importanti. Infine nuovi materiali di studio ci furono procurati dall' Egregio professore Arnao, direttore della Cattedra ambulante di Siracusa, sia da giardini di questa provincia, sia da Alì in provincia di Messina dai giardini del Sig. Sebastiano Parisi. Anche questo proprietario ci fornì a più riprese notizie e materiale per le nostre ricerche.

Cogliamo questa occasione, per esprimere qui agli Egregi professori Bufalini e Arnao ed ai Signori proprietari Minasi e Parisi, vivissime grazie per la gentile loro cooperazione.

Caratteri della malattia

Sui frutti — Le piante colpite dal male si riconoscono a distanza per il particolare colore assunto dai limoni, quando la malattia abbia preso carattere di una vera e propria infezione. Essi presentano un colorito grigio-cinereo se piuttosto giovani, grigio giallognolo se più sviluppati, con una speciale lucentezza metallica dovuta a caratteri assunti dagli strati periferici della

buccia. Si potrebbe dire una ruggine a riflessi argentini, la quale affetta in parte e spesso tutta la superficie del limone.

In tali limoni, visti da vicino anche ad occhio nudo, si scorgono tante chiazze pianeggianti, separate fra di loro da irregolari, fine e poco profonde fenditure di colore più scuro e di aspetto suberoso.

Tali chiazze, non sono altro che porzioni dell'epicarpo, modificate in seguito ad una alterazione patologica che ha evidentemente origine in istrati più profondi. È da notare che negli inizii del male, e cioè in giovani frutti, il processe è affatto irregolare e con varia localizzazione.

Però dalle nostre osservazioni, sembra risultare come esso incominci più sovente là dove i frutti presentano accidentalità di superficie e così ad esempio in quell'avvallamento che spesso presentano i limoni al di sotto della protuberanza terminale. Questo avvallamento che può aver forma circolare, o spesso anche semi-circolare, è sovente il primo a mostrare i sintomi della malattia.

Così pure, eventuali abrasioni della superficie, anche di origine traumatica, presentano non infrequentemente le suddette chiazze argentine; e da questi punti di origine il processo può anche invadere tutta la superficie del frutto.

L'effetto immediato di tale alterazione, è la sostituzione di una superficie coriacea e notevolmente rugosa al tatto, a quella normale.

Inoltre i limoni malati, presentano alla pressione una notevole resistenza e durezza, il che parla a favore di una considerevole modificazione nel tessuto proprio dell'epicarpo.

Visti alla lente, cotesti limoni, quasi sempre mostrano in seno alle chiazze, sopra descritte, dei minutissimi puntini rilevati neri, che fanno notevole risalto sul bianco argenteo delle chiazze medesime, e che non tardammo a riconoscere di natura crittogamica; sono i concettacoli fruttiferi di un fungo microscopico, che tra breve riprenderemo in esame.

Nel maggior numero dei casi le chiazze in questione, determinano come una patina omogenea tanto pel colore, quanto per la ruvidezza o scabrosità della buccia; ma talora si osservano dei frutti nei quali il processo è notevolmente esaltato, da parere di natura diversa; e la superficie di tali limoni si presenta alle volte fortemente rugosa, a squame irregolari e assai scabre e sopratutto di un colore giallo cannella, con poco o punto riflesso argentino. Vedremo come si possa interpretare anche questa modalità di affezione che si osserva anche negli stessi giardini ove si è sviluppata la ruggine bianca.

In altri casi alla patina suberosa, presentata da porzione del frutto, si sovrappongono altre alterazioni, evidentemente per opera di saprofiti o per cause d'altra natura, che esamineremo più avanti.

*
* *

Sezionati i frutti malati, essi rivelano delle alterazioni le quali sono evidentemente in relazione allo sviluppo che ha assunto la patina esterna.

Anzitutto si rileva, come la desquamazione periferica sia un effetto della proliferazione di un tessuto più o meno profondo, e precisamente di un fellogeno o tessuto iniziatore di sughero simile a quello che si ingenera nei fusti e nei rami della maggior parte delle piante legnose, e costituito da un certo numero di strati di piccole cellule tabulari, che fanno transizione ad elementi della buccia di già alquanto modificati nella forma.

Le cellule del tessuto generatore di sughero hanno maggiore sviluppo in senso tangenziale, che in senso radiale; le loro pareti dapprima prettamente cellulosiche, vengono ad assumere in breve i caratteri di quelle suberificate, e ciò via via che nuovi strati di fellogeno si formano verso l'interno.

Operando sezioni in limoni molto infetti, e trattandole con i reattivi propri della suberina, si riesce a mettere in evidente contrasto un certo numero di strati periferici notevolmente mo-

dificati ed un numero di strati sottostanti, ad elementi ancor giovani o in via di incipiente modificazione.

Oltre al suberificarsi delle membrane degli strati più periferici, ivi ha luogo anche una incrostazione di lignina, la quale si rivela nettamente colla floroglucina, col solfato di anilina, ecc. e conferisce appunto a tali strati esterni particolare durezza e resistenza. Tutta la massa dei tessuti suberosi di neoformazione, che viene in tal guisa ad originarsi a maggiore o minore profondità della buccia, fa evidentemente pressione sopra gli strati di cellule collenchimoidee della periferia, le quali così isolate dal resto dell' epicarpo, vengono a sformarsi, a modificare il loro contenuto, ovvero, a riempirsi d' aria, mentre le loro pareti si lignificano notevolmente.

A questi strati di cellule alterate e compresse, si deve appunto l'aspetto e la natura delle desquamazioni della superficie del frutto. Anche le fenditure o screpolature, che si notano in essa superficie, sono dovute alla forte pressione degli strati suberosi.

Non vi è dubbio che questi ultimi sostituitisi a tessuti normali dell' epicarpo, rappresentano una reazione anatomo-fisiologica e a scopo protettivo di fronte a processi irritativi che hanno sede nella parte periferica dei limoni.

Per conseguenza non sono che dei tessuti riparatori, ma nel contempo divengono una barriera pei normali processi funzionali. Infatti, per effetto dei caratteri assunti dalle membrane di tali tessuti, viene menomata se non interamente soppressa la traspirazione dei frutti in via di sviluppo.

Conseguenza certa di questo fatto, è la scomparsa prematura della clorofilla nei frutti giovani, che si osserva tanto meglio, quanto più parziale è la alterazione della superficie. A questo ordine di fatti, che implica menomazione dell' attività funzionale, collegasi pure la degenerazione delle glandule, le quali, nell' epicarpo dei frutti malati, si trovano per natura stessa dei processi anatomo-patologici, sospinte a maggiore profondità, e però venendo probabilmente meno la ragione del loro ufficio

biologico, cadono in degenerazione e finiscono per svuotarsi.

Riguardo all' endocarpo dei limoni infetti, dobbiamo dire che, contrariamente alla presupposizione di una corrispondente alterazione interna, in armonia con la notevole modificazione dell' epicarpo, non si riscontrano segni di alterato sviluppo.

Gli spicchi sonosi formati in modo normale, al pari delle vescichette contenenti l' agro, con turgore e caratteri fisiologici comuni ai limoni sani.

Sembra strano che l' insieme delle alterazioni periferiche non abbia alcun riflesso sui processi maturativi dell' endocarpo; ma a parer nostro, sia per la quantità, che per la qualità del succo di tali limoni non vi è sensibile differenza con limoni normali. Vi ha di più, a Scilla in parecchie piante osservammo di tali frutti, completamente rivestiti di patina rugginosa, che apparivano di bel volume, turgescenti, ed erano ricchi di succo. Inoltre portati parecchi di essi a Catania, hanno mantenuto, nel nostro laboratorio, per molte settimane il loro turgore molto più di quello che se si fosse trattato di limoni sani. (1).

Onde, se dalla natura delle alterazioni esterne si è indotti a ritenere di grave entità la malattia in questione, non parrebbe che si dovesse poi darvi tanto peso, dal momento che in fondo la produzione di succo non è menomata nè alterata. Ma bisogna bene tenere presenti le ragioni tutte del valore commerciale dei limoni; poichè se per le alterazioni esterne dalle quali sono affetti, essi vengono o decisamente scartati, o deprezziati anche sullo stesso mercato interno, a più forte ragione sono rifiutati nel grande commercio di esportazione.

D' altra parte si sa che i limoni sono la base di particolari industrie estrattive che utilizzano precisamente la buccia.

---

(1) È degno di nota a questo proposito il fatto della consistenza coriacea assunta dalla buccia di questi limoni infetti, che potrebbe definirsi un vero e proprio processo di *mummificazione* pel quale tali frutti si conservano senza imputridire per mesi e mesi. La polpa nel loro interno subisce una concentrazione e delle modificazioni chimiche per cui assume alcuni dei caratteri dell' agro cotto, con consistenza sciropposa e particolare profumo.

Evidentemente se vi è a priori una ragione di scarto o di rifiuto del prodotto, per alterazioni esterne, è assai subordinato l'utile che ne può venire da una condizione sia pur quasi normale della parte interna.

Non vi è dubbio intanto, che il valore commerciale di questi limoni viene di tanto ridotto, che il malanno in questione costituisce un vero danno pel proprietario, il quale di fronte alle manifestazioni di carattere esterno per le quali gli viene rifiutato senz'altro il prodotto, non può accampare la quasi normalità del contenuto dei limoni.

D'altronde anche in Sicilia si sà benissimo che i così detti limoni rameggiati, cioè presentanti parziali e leggere alterazioni pur di natura suberosa, provocate più spesso da urti meccanici contro i rami o muri, per causa del vento, vengono rifiutati dal commercio di esportazione e venduti nella piazza a prezzi irrisori.

Sui rami — Se la ruggine bianca assume la maggiore gravità nei frutti, sia per le sue manifestazioni in se, quanto per i danni diretti che ne vengono al coltivatore, trattandosi di una pianta da frutto, non v'è dubbio però che portandosi l'alterazione anche sulle foglie e sui rami, arreca alla pianta disturbi d'ordine fisiologico che tendono a farne diminuire la produzione.

Ci venne infatti detto a Scilla, che avendo infierito cotesta forma di ruggine sulle piante degli agrumi per più di un anno, il deperimento di queste arrivò a tal punto che fu giocoforza praticare una fortissima potatura, o per servirci dell'espressione di quei proprietari « intestarle » di nuovo. Vedemmo infatti numerose piante a chioma nuova con getti vigorosi e di un verde sano, che faceva vivo contrasto con la sparuta e scolorita chioma di piante malate. Tale potatura, non v'è bisogno di dirlo, ritarda di qualche anno la produzione.

I rami che presentansi affetti dalla malattia si riconoscono anzitutto per essere assai più poveri di foglie, alle volte anche

perfettamente spogliati; e inoltre mostrano una tinta bianco-cenerina tutta particolare. Sono i rami di uno, due, tre anni circa che possono offrire tale aspetto, quelli cioè che erano ancora forniti di epidermide al sopravvenire della infezione.

La patina biancastra che li ricopre è, a differenza di quanto avviene nei frutti, più continua, è cioè sfornita in gran parte di quelle minute fenditure che danno un aspetto reticolato alla buccia dei frutti. Direbbesi quasi che fossero spalmati d'una vernice, talora uniformemente, più spesso in modo unilaterale, rimanendo un'intera metà o quasi del ramo, incolume ed ancor verde, l'altra bianco-cenerina; in altri casi sono delle sottili striscie longitudinali che vanno da un nodo all'altro.

Collo svilupparsi del ramo infetto, e per ragioni di tensione esercitata dai tessuti interni la patina suddetta viene alla fine a perdere la sua omogeneità, e presentasi allora interrotta da numerose strie a losanga, di colore bruno.

Non ostante questi diversi caratteri anatomo-patologici dei rami infetti, l'origine delle alterazioni è in fondo la stessa che pei frutti.

Si ha, in altre parole anche qui la produzione precoce di un tessuto riparatore, in una zona più o meno profonda della corteccia, in cui una parte degli elementi istologici vengono a modificarsi, per ragione di reazione a processi irritativi.

Il tessuto riparatore è qui pure un sughero, il quale si sostituisce in più strati agli elementi parenchimatici, colle solite cellule tabulari, di cui le prime formatesi vanno modificando la loro membrana che si suberifica. Vengono così sospinti all'infuori tutti gli elementi corticali periferici, i quali perdono in breve il carattere di cellule vive, il loro contenuto si altera, ed in molti di essi viene ad eliminarsi e sostituito con aria.

Da ciò il colore e la speciale rifrangenza dello strato periferico corticale.

Formandosi in quantità nuovo sughero questo si addossa al precedente e così coll'accresciuta pressione dei tessuti neo-

formati, gli strati di cellule parenchimatiche periferiche, vengono quà e là a perdere la loro continuità, e si formano spaccature di più in più rilevanti che corrispondono a quelle strie nerastre che interrompono, all'esterno, la continuità della patina biancastra.

Gli strati più vecchi di sughero ed anche quelli mortificati del vecchio parenchima, lignificano in parte le membrane delle loro cellule, come i reattivi speciali mettono in evidenza.

Verso la parte interna, e cioè al disotto del fellogeno, gli elementi corticali, costituenti il clorenchima, si osservano pure in via di degenerazione: i loro corpuscoli assimilatori ingialliscono, perdono la loro forma normale e si spezzettano.

Tutto questo ha non dubbi effetti sull'economia delle piante i cui rami appunto inaridiscono, fino a seccare.

Sulle foglie. — Lo stesso fatto dell'alterazione dei rami, che porta come si disse testè, al loro inaridimento, deve avere per legittima conseguenza un riflesso sopra gli organi appendicolari. Si disse già che le piante infette finiscono per perdere buona parte delle loro foglie, e ciò potrebbe pure essere spiegato come riflesso dell'alterazione dei rami. Ma anche le foglie stesse soggiacciono alla medesima causa di malore dei frutti e dei rami, ed una prova di ciò si ha nella insolita e caratteristica variazione di colore che esse assumono. Infatti nella pagina superiore si mostrano di un verde sbiadito, volgente anzi al giallognolo, mentre poi nella inferiore si presentano di un colore biancastro particolare. Quivi è una leggera velatura bianco sericea, uniforme per tutta o per gran parte della pagina inferiore, o solo interrotta da piccole prominenze di colore giallo cannella, di natura prettamente suberosa, spesso screpolate. Queste si riscontrano del resto anche in foglie di piante non infette, e molto probabilmente debbono ascriversi o a cause meccaniche o piuttosto a punture di animali.

Già il Penzig, nella citata opera, mise in rilievo la strut-

tura di tali verruchette, e pur dubitando che esse possono essere originate da punture di acari o di cocciniglie, afferma di non aver mai visto parassiti speciali sulle foglie così alterate, e molto meno sopra o negli stessi cuscinetti, com' egli chiama coteste verruche e lascia indecisa la questione.

Il Penzig poi non fa accenno alcuno alla patina bianco-sericea delle foglie che è sintomo della ruggine bianca, solo parla di macchie bianche, o biancastre giallognole e di variegature che si possono osservare nelle foglie degli agrumi, senza annettervi significato di fatti patologici.

Egli così si esprime a tal riguardo:

« Le indagini microscopiche sulla ragione di siffatti fenomeni ci dimostrano, che nulla si è cambiato nella struttura anatomica della foglia, ma che le varie tinte sono prodotte solo da ineguale distribuzione della clorofilla. »

Invece nelle foglie delle piante di limoni di Scilla, oltre i sintomi esterni della malattia evvi pure un riscontro in alterazioni anatomo-patologiche dei loro tessuti. Fatta una sezione trasversale in una foglia infetta, e vista al microscopio, oltre le formazioni suberose, già con molti dettagli descritte dal Penzig a proposito delle suddette verruchette, noi abbiamo potuto constatare che la patina bianco-sericea, su indicata, è dovuta precisamente ad una debole formazione di fellogeno che in questo caso ha sede precisamente nelle stesse cellule dell' epidermide della pagina inferiore, anche qui in seguito, molto probabilmente, a fenomeni irritativi.

Occorre un attento esame per verificare questo fatto, poichè nelle foglie dei limoni il tessuto lacunoso non ha invero la struttura tipica degli ordinari tessuti aeratori delle foglie; esso è formato di due o tre strati di cellule, di forma pressochè quadratica, abbastanza regolarmente disposte in senso tangenziale, che fanno passaggio solo verso l'interno ad elementi rotondeggianti e fra loro distanziati in guisa da lasciare dei vani seriati. Ora, i primi strati di cellule di tale tessuto lacunoso potreb-

bero per la loro regolare disposizione facilmente scambiarsi con un fellogeno. Ma questo invero non ha origine in elementi del tessuto lacunoso, ma come si disse nelle stesse cellule epidermiche; nè d'altra parte cotesta formazione peridermale vi prende molto sviluppo poichè si limita ad uno o due strati di cellule. Da ciò il differente aspetto anche della esterna manifestazione che si ha nelle foglie in confronto di quella più saliente dei rami e dei frutti.

Quest'alterazione abbastanza caratteristica oltre a modificare i processi fisiologici dell'organo assimilatore, provoca altresì degenerazione nei cloroplasti, formazione di prodotti di natura secretoria, granulazioni, ecc. ecc.

L'insieme di tali alterazioni spiega il colore sbiadito che presentano le foglie malate.

In progresso di tempo queste foglie vengono ad accartocciarsi assumendo una direzione obbliqua sul ramo e una debole aderenza su di esso: e da ultimo, come già si disse, finiscono per cadere.

Etiologia della malattia.

Già fin sul primo materiale inviatoci per studio, un attento esame della superficie dei limoni infetti ci fece riscontrare, sopra le squamette rugginose caratteristiche, minute punteggiature rilevate che, come sopra si disse, furono tosto da noi riferite a produzioni crittogamiche. L'esame microscopico confermò tale supposizione e constatammo che detti punti rilevati non erano altra cosa se non minuti concettacoli fruttiferi di un fungillo appartenente alla famiglia delle Sferossidee, e precisamente al genere *Phoma*.

Parecchie specie di questo genere sono già state descritte specialmente dal Penzig per i rami e per le foglie degli agrumi. Non è a nostra cognizione che ne siano state segnalate per i frutti: comunque i caratteri offerti dal fungillo che con straor-

dinaria frequenza si riscontrò sui limoni infetti, tanto di Scilla quanto di Cannizzaro e di Alì, non corrispondono a parer nostro a quelli di alcuna delle specie di *Phoma* descritte per gli agrumi.

I concettacoli o picnidi del microscopico fungo in questione sono di forma globulare con un ostiolo poco prominente ed erompono dalla epidermide lacerata. Sono neri, fragili, con un peridio, (membrana pseudo-parenchimatosa avvolgente) di consistenza carbonacea.

I picnidi misurano circa 70 millesimi di millimetro di diametro, e 40 circa in altezza. Nel loro interno producono un numero stragrande di piccolissime spore, incolore, unicellulari, di forma elissoidale od ovale, a contenuto jalino ed a membrana esilissima. Misurano 4 × 2.5 millesimi di millimetro (1).

Alla base e tutto attorno a questi concettacoli, stanno dei miceli bruni, filamentosi, spesso torulacei, di colore olivaceo, fosco. Questi miceli si osservano copiosi nelle chiazze suberose, specialmente in limoni invecchiati, nei quali determinano un ulteriore processo di alterazione della buccia.

Però tali miceli non si insinuano che raramente molto addentro ai tessuti dell'epicarpo, e si limitano ad invadere alcuni strati esterni delle squame rugginose, di rado portandosi a contatto del sughero, mentre prendono un notevole sviluppo alla superficie, come ben fanno vedere opportune sezioni tangenziali.

Vista la frequenza di questo fungillo nei limoni malati tanto di Calabria, che di Sicilia, ci venne dapprima l'idea che questo potesse essere la causa della ruggine dei limoni, e si pensò subito ad isolarlo mediante colture per poi vedere di riprodurre

---

(1) La diagnosi che si può dare per questo fungillo è la seguente:

Phoma Citri-Robiginis Cavara et Mollica.

Peritheciis perexiguis, 70 μ diam. 40 altis, ex mycelio torulaceo ortis, sparsis, nigris, carbonaceis, parum prominulis; ostiolo depresso donatis; sporulis minutis, 4 × 2, 5 μ ellypsoideis vel ovalibus, hyalinis.

Habit. In cortice fructuum Citrorum, morbo vulgo « Ruggine bianca » affecto. Calabria et Sicilia.

con artificiali inoculazioni, il processo patologico da esso determinato sopra limoni sani.

Le spore conservavano abbastanza la capacità germinativa cosichè, sia in acqua di fonte, addizionata di succo di limone, sia in mezzo solido (Agar-Agar) diedero tubi germinativi e micelio — Nelle colture in Agar si ebbe anzi un rapido e copiosissimo sviluppo del fungo, sì da dar luogo in pochi giorni alla formazione di infiniti picnidi. Ciò tanto con materiale di Scilla che di Cannizzaro, con meravigliosa costanza di caratteri e con straordinaria purezza delle colture. Solo dovemmo osservare in tutte queste colture in Agar-agar che i picnidi erano privi di un vero ostiolo, ma la parte centrale e più prominente, di essi vista di faccia si presentava di struttura più lassa, per cui sotto lieve pressione, in corrispondenza di essa, si fendeva il peridio, mettendo in libertà infinito numero di spore. Queste avevano gli stessi caratteri delle spore che avevamo usato per la coltura.

Servendoci di questo ottimo materiale, che si potè ottenere sempre più puro con reiterati passaggi di colture, noi tentammo esperienze di inoculazione su limoni perfettamente sani, tenuti in camera umida, a temperatura piuttosto elevata perchè eravamo in estate. A tal uopo si spalmarono le superficie dei detti limoni con porzioncella di coltura in Agar-agar. Tentammo anche di inoculare spore, germinate in acqua di fonte, tratte da materiale fresco.

Nessun visibile effetto si ebbe da tali esperienze, nemmeno quando con apposita lancetta si inoculò il materiale per via subepidermica.

Non fà bisogno di dire che furono osservate tutte le cautele necessarie per l'assoluta sterilizzazione dei mezzi usati.

Risultati vani questi saggi di inoculazione, fummo tratti a giudicare di natura saprofitica il *Phoma*, pur così diffuso nei limoni malati, e stabilimmo di recarci espressamente a Cannizzaro per esaminare le fasi iniziali del processo patologico e stabilire quando veniva ad apparire sulle chiazze suberose il descritto fungillo.

Potemmo appurare che, in manifestazioni iniziali del processo suberoso, nè periteci nè miceli si osservavano sulla buccia.

Onde dovemmo in modo assoluto escludere che il *Phoma* fosse la causa prima del male. Con ciò non si esclude che questo fungo, una volta presa stanza nelle squamette suberose e insinuando il suo micelio nel tessuto dell'epicarpo, per quanto non profondamente come si disse, non aggravi sempre più il processo patologico.

Il *Phoma* avrebbe in altre parole una azione disturbatrice conseguente alla causa prima del male, concorrendo ad aggravarlo sempre più.

Nella medesima ispezione a Cannizzaro, altri fatti emersero, alcuni dei quali di non spregevole importanza e che furono confermati anche nella visita ai giardini di Scilla. Anzitutto non v' è dubbio alcuno che processi degenerativi dell'epicarpo con produzione di sughero hannosi frequentemente per azione meccanica, e cioè urti e strofinio di limoni sia contro rami sia contro muri—Sopratutto gli urti contro i rami, specie se questi conservano ancora spine o presentano monconi, hanno per effetto abrasioni più o meno manifeste, talora vere ferite che nel frutto in via di sviluppo vengono rimarginate da pronta formazione di sughero. E si osserva che, una volta iniziato il processo suberoso in un punto leso, esso molte volte procede ed irradia di per sè, probabilmente per trasmissione della irritazione dovuta allo stimolo iniziale.

Che ciò avvenga con frequenza potemmo con sicurezza assodare, ma in tali casi d'ordinario le alterazioni sono unilaterali e cioè in corrispondenza della regione soggetta all'urto. Altra prova si ha in ciò che nel caso di frutti con accidentalità di superficie, ossia con eventuali avvallamenti, è soltanto la parte sporgente quella che fa vedere l'alterazione. Nei casi citati, è spesso visibilissima anche l'impronta del ramo offensore.

D'altra parte l'aspetto delle alterazioni dovute ad azione meccanica, non corrisponde interamente a quella dei limoni

affetti dalla ruggine sugherosa, oggetto delle nostre ricerche. Le desquamazioni si fanno in tali casi con nessuna regolarità, con spessore, consistenza, e colore di molto diversi che nella ruggine bianca. Ciò potemmo anche confermare con dati sperimentali. In una pianta di limone si produssero delle abrasioni su varii frutti ancor verdi mediante leggere percosse praticate con rami secchi della stessa pianta. Dopo alcuni giorni la superficie così offesa si presentò rugosa, scabra e di color giallastro, ma di aspetto ben diverso da quello offerto dai limoni con ruggine bianca.

Per conseguenza è da escludere che questa malattia, vada attribuita a cause meccaniche.

In alcune piante di limoni crescenti, a Cannizzaro, in vicinanza delle stradelle in rilievo, osservammo che i frutti i quali venivano a poggiare su di esse presentavano una assai caratteristica alterazione in corrispondenza appunto della parte che toccava il terreno.

Si trattava anche qui di una straordinaria produzione sugherosa, ma determinante all'esterno del frutto non una desquamazione, ma sibbene una tumida zigrinatura di colore grigio-giallognolo, resa però bruna nella parte centrale, da copioso sviluppo di funghi demaziacei (*Macrosporium*, *Cladosporium* sp.)

In sezione trasversale dell' epicarpo si osservava un copioso sviluppo di ife miceliche di colore olivastro, tortuose o varicose, le quali si addentravano molto profondamente nel tessuto suberoso, provocandone evidentemente una più attiva moltiplicazione.

Come ben si rileva, anche in questo caso, nel quale la causa è in gran parte di natura fisica, l'alterazione è unilaterale, non compromettente cioè che la regione di contatto.

Si fu così costretti a portare la nostra considerazione sopra un altro ordine di cause, pensando che la ruggine bianca potesse essere la conseguenza dell' azione continuata di piccoli animali.

È noto come i frutti degli agrumi in genere alberghino una quantità di piccoli ectoparassiti, sopratutto cocciniglie ed acari.

Per quanto è a nostra cognizione, nessuna delle specie di cocciniglie che si fissano sugli agrumi, determina alterazioni che siano lontanamente comparabili a quelle che abbiamo descritte. Piuttosto è fra gli acari che alcune specie sono state indicate come causa di ruggine negli agrumi. Fra le altre il Penzig, nella più volte accennata opera, cita il *Typhlodromus oleirorus* come acaro della ruggine e parla anche di altre specie come il *Tydeus Aurantii*, ed anche il *Tetranychus Aurantii*. Riguardo al primo, esso appartiene ad una ben nota famiglia di acari, quella dei *Fitoptidi*, che sono dei parassiti galligeni; ma a detta dello stesso autore il *Typhlodromus oleirorus* non è stato ancora rinvenuto in Europa, mentre si è reso dannoso negli agrumeti americani. Dai caratteri assegnati dal Penzig agli organi infetti (foglie e frutti), sembra esservi una certa attinenza con la malattia da noi studiata, per cui pensammo di esaminare accuratamente i limoni, per vedere se era possibile riscontrare il suddetto *Typhlodromus*, o qualche altro rappresentante dell' ordine degli acari.

Se non ci fu dato mai di imbatterci nel suddetto agente della ruggine degli agrumi americani, tuttavia non furono invero infruttuose le nostre ricerche, poichè prima nei giardini di Cannizzaro, e molto più ancora in quelli di Scilla e di Alì, si ebbe a rilevare la quasi costante presenza di acari in genere, nei frutti e nelle foglie attaccati dal male.

Di questi acari alcuni sembraronci avere realmente preso stanza negli agrumi infetti, altri ci parvero visitatori casuali. Così ad esempio qualche *Oribatide* che rinvenimmo in numero scarso di esemplari sopra qualche frutto, ed in seguito non più trovato, appartiene appunto alla categoria dei visitatori casuali. D' altra parte codesti acari vivono d' ordinario fra i muschi o sotto i talli vecchi dei licheni e non si conosce finora fra di

essi alcun parassita quindi è presumibile che i pochi trovati abbiano casualmente abbandonato la loro abituale dimora e si siano portati, vagando, sui limoni.

Di quelli invece che sembra a noi si siano realmente stabiliti a scopo di nutrizione sugli organi degli agrumi, e ne abbiamo riscontrati rappresentanti di varî generi (*Tetranychus*, *Tydeus*, *Lejosoma*, *Tenuipalpus*) una specie ci si mostrò con così costante frequenza ed in tale quantità da farci persuasi che ad essa sia da ascrivere la causa della ruggine bianca.

Intanto i suoi caratteri non ci permisero di riferirlo ad alcuna delle specie di acari menzionate dal Penzig (opera citata).

Inviati alcuni esemplari all' Illustre acaridologo, Prof. Antonio Berlese di Portici, questi con cortese sollecitudine ci riferiva appartenere essi al *Tenuipalpus cuneatus (C. et F.) Berl.* della famiglia dei Trombididi, che fino ad ora non era stato riscontrato sugli Agrumi.

Trattasi di un minuto acaro, appena visibile ad occhio nudo, di colore rosso aranciato, a corpo ovale, diviso nettamente da solco trasversale fino quasi all' origine del terzo paio di zampe, che misura appena in lunghezza da 250 a 300 millesimi di millimetro. Ha movimenti lenti e lo si osserva di preferenza nella infossatura che si nota d' ordinario al di sotto della protuberanza apicale del limone, come anche dalla parte opposta intorno all'inserzione del peduncolo, annidandosi nelle fenditure che separano le squame rugginose. Queste localizzazioni parlano in favore del suo parassitismo, in quanto sembra che esso si fissi dapprima in porzioni di limoni atti a costituirgli come un ricovero, e d' altra parte abbiamo detto più sopra, che la ruggine procede appunto, d'ordinario, da simili accidentalità di superficie dei frutti.

Si aggiunga poi che risultò dalla nostra osservazione sul luogo che nei limoni, nei quali il processo suberoso va estendendosi alla superficie di essi, molti acari si riscontrano ancora verso il limite dell' alterazione ciò che si spiega facilmente col biso-

gno da essi sentito di invadere sempre nuova superficie sana.

Oltre che sui frutti, potemmo stabilire del pari, la presenza di questi acari sulle foglie; peraltro in numero assai minore che sui frutti e spesso in unione a qualche altra specie annidata in bollosità del lembo. Quanto ai rami non ci venne fatto di riscontrarne. Con ciò non si esclude che essi non visitino anche questi organi, anzi a priori è da ritenere, che essi li abbiano visitati prima di recarsi ai frutti, che offrono loro tanto copioso nutrimento.

Considerato che alterazioni del genere di quelle in discorso sono state attribuite all'azione di altri acari (*Typhlodromus oleivorus*) e vista la costante presenza del *Tenuipalpus cuneatus* specialmente a Scilla e ad Alì, siamo venuti nella convinzione che con tutta probabilità la ruggine degli agrumi di Calabria e di Sicilia, sia dovuta alla azione di questi acari. La diffusione di questa malattia, a quanto ci fu riferito, è stata grande in questi ultimi anni e sembra che essa vada ripetendosi a periodi di anni, forse in dipendenza di particolari condizioni meteoriche che favoriscono la diffusione di tali parassiti.

Oltre alla analogia su citata della ruggine provocata dal *Typhlodromus*, va ricordato qui pure che lo stesso Penzig, inclina ad attribuire alla azione degli acari quelle specie di produzioni suberose che così frequentemente si osservano nelle foglie degli agrumi.

Quanto alla incolumità degli aranci e dei mandarini, non è da ritenere che essa sia di carattere assoluto. In esemplari di aranci avuti da Siracusa, per mezzo dell' Egregio Prof. Arnao, riscontrammo pure i primi sintomi della malattia. La maggiore resistenza di questi agrumi può essere in relazione a principî amari o comunque sgraditi agli acari, per cui questi preferiscono di invadere i limoni.

A confortare la convinzione nostra circa la supposta causa della ruggine, abbiamo pensato anche a qualche esperienza intesa

a riprodurre effetti analoghi a quelli delle punture degli acari.

La reazione del protoplasma delle cellule vegetali a quello stimolo che è dato dalla puntura di piccoli animali, si spiega facilmente per la natura tossica dei secreti delle loro punture. Ora assai spesso questa azione tossica è dovuta ad un principio assai diffuso negli animali ed a base di acido formico.

Pensammo perciò di utilizzare questa nozione in qualche saggio sperimentale. Scelte alcune piante di limoni a frutti perfettamente sani e non ancor del tutto maturi dell'Orto Botanico (anche quella stessa che ci servì per dimostrare gli effetti della azione meccanica) in buon numero di limoni inoculammo tracce di soluzioni di acido formico, al $^1/_2$, $1\,^1/_2$, $2\,^1/_2$, 5, 12 e 25 % contrassegnandoli ed esaminandoli a intervalli di tempo.

La inoculazione veniva fatta o per strie praticate colla punta d' una siringhetta Pravaz ed a mano leggera, ovvero per punture poco profonde nella buccia dei limoni. Dopo pochi giorni si resero visibili dei processi cicatriziali in corrispondenza delle strie, ovvero delle punture, processi che assunsero ben presto l' aspetto della patina bianco-grigiastra dei limoni infetti, non presentando per altro ben marcate le screpolature caratteristiche di questi. Peraltro la reazione anatomo-patologica aveva assunto notevolissima manifestazione e l' osservazione microscopica diede una conferma della analogia di reazione fisiologica. Un vero fellogeno si era formato nella corteccia dei limoni operati, con abbondante produzione di strati di sughero all' ingiro della ferita. Per una troppo energica azione del liquido sulle cellule, specialmente per le soluzioni forti, si erano determinati dei disturbi fisiologici di più grave entità ed era sopravvenuta una modificazione chimica delle membrane delle cellule offese, sicchè esse reagivano alla stessa guisa delle membrane lignificate mentre il contenuto delle cellule era profondamente alterato. Anche le soluzioni più deboli provocarono una reazione.

L' azione irritante delle soluzioni di acido formico si spiegò anche là dove queste lambirono la superficie del limone attorno

ai punti lesi dall'ago inoculatore. Anzi in questi casi si era formata una patina bianco-argentina, lucente, molto, simile a quella della ruggine bianca, solo più omogenea.

Mezzi di difesa.

Mezzi profilattici e curativi — In genere di malattie di piante, come di animali, è solo quando si è bene appurata la causa del male che è lecito consigliare mezzi di difesa. Già da tempo il professore Bufalini a nome anche dei proprietari di giardini infetti di Scilla chiedeva a noi suggerimenti circa il modo di combattere questa malattia dei limoni e allorquando sulle prime si era inclini a ritenere che essa malattia potesse essere causata dal *Phoma* che così frequentemente riscontrasi nei frutti infetti, si era consigliato, con una certa riserva, l'applicazione di sostanze anticrittogamiche, anzi della stessa poltiglia bordolese, già tanto in uso per combattere la peronospora della vite.

Dal momento che la causa del male in seguito alle ricerche fatte, risultò non essere la detta crittogama, ma con ogni probabilità l'azione di acari infesti, il suddetto trattamento poteva forse tornare utile anche per questi parassiti, ma presumibilmente di non sicura efficacia. Stando nel campo delle previsioni, l'applicazione ben fatta della poltiglia bordolese, avrebbe potuto tenere lontani gli acari dai frutti, ma difficilmente con essa si sarebbero potuti distruggere cotesti parassiti.

Peraltro se con questo mezzo si fosse arrivati anche soltanto a difendere i frutti sia dalla suddetta crittogama che dagli acari, lo scopo pratico sarebbe stato in gran parte raggiunto.

Si resero pertanto consigliabili i mezzi insetticidi, applicati tanto a scopo profilattico che curativo. E pensammo che le svariate specie di emulsioni saponose con principi più o meno attivi, l'estratto fenicato di tabacco convenientemente diluito, (1 al 3 %), la pitteleina, etc. applicati con cura sia sui frutti che sui rami e le foglie, avrebbero certo soddisfatto alla bisogna.

E tale nostra convinzione (confortata anche da private esperienze su quel di Cannizzaro) comunicammo al prof. Bufalini e interessati.

Abbiamo ogni ragione di credere che esperimenti in questo senso saranno stati intrapresi a Scilla e ad Alì ove il male infierisce di più, e ci auguriamo di potere constatare nell'anno venturo la efficacia dei nostri suggerimenti.

Igiene agrumicola — Non v'è dubbio che la diffusione dei parassiti è tanto più agevolata, quanto meno buone sono le condizioni nelle quali gli agrumi sono tenuti. È legge ormai ammessa che gli organismi sani ed in ottime condizioni igieniche, offrono maggiore resistenza all'attacco dei parassiti. Così è per gli agrumi, e noi abbiamo potuto constatare sì in Sicilia che nelle Calabrie, che i giardini più fiorenti e quasi del tutto immuni da nemici debbono questo loro stato ad un saggio governo, ad una oculata sorveglianza. Il tenere sbarazzati i tronchi ed i rami da cause di infezione, ad esempio dai licheni, dai muschi, ecc., è anzitutto una prima e buona pratica, la quale ha per effetto di togliere il naturale ricovero ad una infinità di parassiti animali ed asilo di non meno numerosi organi riproduttori di crittogame, che il vento inevitabilmente trasporta.

Un mezzo di praticare cotesta pulitura in uso a Cannizzaro è lo strofinare i tronchi e i rami grossi con corde di cocco ovvero con robuste spazzole.

Con questi mezzi si raggiunge lo scopo voluto senza danneggiare la corteccia, ciò che non si ottiene sempre col tanto vantato guanto di Sabatè. Si riesce a dare ai tronchi il loro aspetto normale ed una superficie liscia, non guasta.

Ad ostacolare poi la ascensione lungo il fusto e i rami di piccoli animali, va praticata come è noto, la aspersione con latte di calce, il quale se applicato anche a tempo debito all'intiera chioma la preserva assai bene dalla fumaggine, affezione questa che tanto si connette con la poca cura dei giardini.

Sede di crittogame e di insetti, divengono pure i monconi di rami per varie cause stroncati, o gli stessi rami morti o deperienti; oltrechè questi organi dimezzati o morti, sono come già si disse una prima causa di lesioni e di processi sugherosi, dei frutti. Non vi ha dubbio perciò che una condizione del regolare sviluppo di questi organi, sia l'asportazione di tali rami.

È da ricordare in fine come si renda necessario quando a quando una saggia ed accurata potatura per agevolare con ogni mezzo una buona aerazione ed illuminazione delle piante.

APPENDICE I.

Avevamo ultimate le nostre ricerche e pronto per la consegna il manoscritto del presente lavoro, quando siamo venuti a cognizione di due pubblicazioni italiane sopra la Ruggine bianca dei limoni. Una porta per titolo « Sopra una grave malattia che deturpa i frutti del limone in Sicilia, nota preliminare di G. Briosi e R. Farneti » pubblicazione dell'Istituto Botanico di Pavia Ottobre 1902. L'altra ha per titolo « Danni causati dalla *Heliothrips haemorrhoidalis* (Bouchè) agli agrumi, del Dott. G. Leonardi — in Bollettino di Entomologia Agraria, Patologia vegetale ecc. Padova, Novembre 1902.

Nella prima di queste pubblicazioni, dopo un'accurata descrizione della malattia, che collima con quella da noi data, gli autori riferiscono di avere riscontrato nei limoni infetti, un fungillo che ritengono probabile causa della ruggine in questione, e da loro denominato *Ovularia Citri*. Esso avrebbe molte analogie con la *Oospora hyalinula* Sacc. che « vive generalmente parassita del micelio di altri micromiceti che si sviluppano sopra le foglie e i peduncoli degli agrumi, e che alle volte prende una grande diffusione. »

Per parte nostra mentre abbiamo constatato, come sopra è detto, miceli e concettacoli fruttiferi di una Sferossidea, presente

quasi sempre sulle placche rugginose, non abbiamo però incontrato mai nel materiale avuto in esame, la *Ovularia Citri* Br. et Farn.

Quindi non possiamo confermare l' opinione dei chiarissimi autori, che a questo fungo sia devoluta la ruggine.

Quanto all' *Heliothrips haemorrhoidalis*, portato innanzi dall' Egregio dott. Leonardi di Portici, dobbiamo dire che anzitutto lo stesso dott. Leonardi osserva « che nei campioni provenienti da Messina non si potè rinvenire alcun insetto incriminabile » e ciò in vero toglie carattere di generalità all' asserto che l' *Heliothrips* suddetta possa esser la causa della ruggine.

D' altra parte, non averla noi osservata sui frutti di ben tre località, fra di loro distanti (Cannizzaro, Messina, Reggio) mentre che per parte nostra si ebbe costantemente a riscontrare presente tanto nei limoni che nelle foglie affette da ruggine il *Tenuipalpus cuneatus* ci fa da un lato escludere come causa l' *Heliothrips haemorrhoidalis* e mantenere la nostra opinione, che la ruggine bianca sia dovuta agli acari e principalmente a quello da noi segnalato.

Appendice II.

Crediamo opportuno di riportare qui le conclusioni presentate da noi intorno alla ruggine dei limoni al Congresso Agrario, internazionale di Roma (Aprile 1903).

1. La *ruggine bianca* dei limoni, affetta i frutti, le foglie ed i rami di questi alberi fruttiferi. Essa è caratterizzata dalla formazione più o meno abbondante di sughero, in seguito ad un processo irritativo delle cellule del tessuto tegumentale.

2. Nelle foglie è la pagina inferiore la sede dell' alterazione. La superficie di essa acquista una tinta biancastra a riflessi sericei. La formazione del sughero vi è assai debole ed ha luogo nelle cellule epidermiche. Nei rami giovani, si forma alla super-

ficie una specie di patina liscia, bianco-gialliccia, più spesso unilaterale. Il sughero prende origine nelle cellule della corteccia ed in modo assai più ragguardevole che nelle foglie.

3. Nei frutti la ruggine assume dei caratteri assai particolari. La superficie dell'epicarpo diventa scabra e si presenta costituita di placche o scaglie poligonali, di un color bianco cenere, o talvolta gialliccio, separata da fenditure tanto più notevoli quanto più l'alterazione è avanzata. La formazione del sughero vi è profonda ed assai abbondante.

4. Soltanto nei frutti l'alterazione si complica di più per effetto di funghi che vengono a fissarsi sulle placche rugginose. Sono dei micelii demaziacei e torulosi, che invadono queste scaglie e che vanno a dar luogo a formazione di concettacoli riferibili al genere *Phoma*, che si riempiono di spore ellissoidali piccolissime.

5. Questi micelii coi loro concettacoli debbono riguardarsi come forme saprofitiche. Ciò è stato dimostrato dai risultati negativi che hanno dati saggi di inoculazione su frutti sani, coi prodotti delle colture pure del *Phoma*. Non si può negare tuttavia che questi funghi possono esaltare i processi anatomo-patologici.

6. Che i micelii delle scaglie rugginose non possano essere la causa della ruggine bianca, è abbastanza dimostrato inoltre dal fatto che essi non si riscontrano sopra le foglie e sui rami dei limoni che hanno al tempo stesso i loro frutti affetti da questa malattia.

7. La causa della ruggine bianca và ricercata nell'azione di altri parassiti. Ora nei materiali di località assai distanti di Sicilia e di Calabria, si è sempre notata la presenza di un acaro della famiglia dei Trombididi: il *Tenuipalpus cuneatus*, che non era stato riscontrato fino oggi sui limoni.

8. Diversi fatti si prestano a confermare l'opinione che il *Tenuipalpus cuneatus* possa provocare la ruggine bianca: 1° La presenza costante di questo acaro sui frutti malati studiati,

2° L'analogia di questa malattia con la ruggine degli agrumi americani pure essa causata da un acaro, il *Typhlodromus oleivorus*. 3° I danni causati in altri vegetali da acari della stessa famiglia dei Trombididi (*Tetranychus*, *Tydeus*, ed altri). 4° L'attribuzione che si è fatta da altri di formazioni parziali di sughero nelle foglie ad acari. 5° In fine la riproduzione di processi anatomo-patologici sui frutti, con iniezioni di sostanze tossiche analoghe a quelle che possono introdurre nei tessuti vegetali, gli acari con le loro punture.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA.

Fig. 1. — Un limone affetto da ruggine bianca.

» **2.** — Sezione trasversale di buccia di limone con processo iniziale di ruggine.

» **3.** — Sezione di buccia di limone con placche di ruggine screpolate.

» **4.** — Sezione trasversale di buccia di limone con placche rugginose più sviluppate, con micelii fungini e picnidi di *Phoma*.

» **5.** — Sezione trasversale di buccia di limone con processo sugheroso provocato per iniezione di acido formico all' 1 e $^1/_2$ per $^0/_{00}$.

» **6.** — Micelii fungini visti in sezione tangenziale di limone.

» **7.** — Sviluppo di picnidi del *Phoma Citri-Robiginis* in Agar-Agar.

» **8.** — *Tenuipalpus cuneatus*, da nostro preparato.

Istituto zoologico della R. Università di Catania
diretto dal Prof. A. RUSSO

Primo contributo allo studio della Fauna elmintologica dei Pesci della Sicilia orientale

dei Dottori
PIETRO BARBAGALLO e UMBERTO DRAGO

Il presente lavoro (1) ha per iscopo di contribuire a colmare una lacuna, che lo studio dell' Elmintologia purtroppo lamenta, poichè, sebbene il classico lavoro del *Linstow* (2) sia abbastanza ricco di specie parassite e si rivolga sopra un numero piuttosto significante di specie ospitanti, tuttavia esso è d' indole generale e non tiene conto della località delle Faune, oltre a che presenta delle lacune per quanto si riferisce a certe specie di Pesci e di Elminti da essi ospitati, che non si trovano nell'elenco. La classificazione, poi, e la nomenclatura, alquanto in disuso, rendono indispensabile un continuo lavoro di consultazione di altre monografie più moderne.

Con l' intendimento di facilitare le ricerche agli studiosi dell' argomento e di far conoscere la Fauna Elmintologica dei Pesci della Sicilia orientale, noi, come ha fatto lo *Stossich* (3)

(1) Nell' eseguire le presenti ricerche, il nostro lavoro è stato distribuito in modo che potesse risultare distinta quella parte con cui ognuno vi ha partecipato.

Così il D.R PIETRO BARBAGALLO ha eseguito le ricerche sulle seguenti famiglie di Pesci: *Mustelidae, Rhynobatidae, Torpedidae, Rajidae, Clupeidae, Anguillidae, Gadidae, Exocoetidae, Mullidae, Scombridae, Sparidae, Trichiuridae, Maenidae, Mugilidae, Sphyraenidae.*

Il D.R UMBERTO DRAGO, da parte sua, ha rivolto le ricerche sulle famiglie: *Petromyzonidae, Spinacidae, Squatinidae, Myliobatidae, Trigonidae, Cyprinidae, Scopelidae, Pleuronectidae, Labridae, Orthagoriscidae, Lophiidae, Gobiidae, Triglidae, Percidae, Sciaenidae.*

(2) LINSTOW O. *Compendium der helminthologie.* (Hannover, 1878-1889).

(3) STOSSICH M. *Saggio di una Fauna Elmintologica di Trieste e provincie contermini.* (Trieste, Stab. tip. G. Caprin, 1898).

per il compartimento di Trieste, abbiamo accuratamente ricercato sui Pesci portati al mercato, o direttamente offerti a questo Istituto, avendo cura di ripetere parecchie volte l'esame di una specie, valendoci di diversi individui successivamente, come ancora in epoche diverse.

Nella diagnosi delle specie di parassiti ci sono stati di guida, oltre i lavori del *Linstow* (1) e dello *Stossich* (2), molte monografie che sarebbe lungo e poco opportuno enumerare: nell'identificazione della specie dei Pesci ci siamo uniformati al trattato del *Carus* (3) e al lavoro del *Tuttolomondo* (4).

Le osservazioni poste sotto ad alcune specie di Elminti non debbono essere prese in senso assoluto, perchè spesso, si sono avuti pochi esemplari del pesce che le ospita.

Circa all'*ordinamento del presente* lavoro dichiariamo che, conforme a quanto è stato fatto da altri, per comodità del lettore lo abbiamo diviso in due parti: la 1ª comprende l'elenco sistematico dei parassiti; la 2ª l'elenco dei Pesci e dei parassiti che vi sono stati riscontrati.

---

(1) LINSTOW O. l. c.

(2) STOSSICH M. l. c.

(3) CARUS J. V. *Prodromus faunae mediterraneae*. Vol. II. (Stuttgart. 1889-1893).

(4) TUTTOLOMONDO A. *Fauna ittiologica del compartimento marittimo di Catania*. (Girgenti. Tip. S. Montes, 1901).

ORDO TREMATODA

SUBORD. MALACOCOTYLEA

Fam. Distomidae. Monticelli

Subfam. Distominae. *Cobbold*

Gen. Podocotyle, Dujardin.

(1) **Podocotyle contortum.** Rudolphi.

In vari esemplari aderenti alle branchie, al palato e all'intestino dell' *Orthagoriscus mola*, Schneid.

Catania, aprile, maggio 1902.

(2) **Podocotyle macrocotyle.** Diesing.

In alcuni esemplari aderenti all'ultima porzione dell'intestino dell' *Orthagoriscus mola*, Schneid.

Catania, novembre 1902.

(3) **Podocotyle fractum.** Rudolphi.

In rari esemplari poco aderenti all' intestino del *Box salpa*, Cuv.

Catania, maggio 1902.

(4) **Podocotyle pedicellatum.** Rudolphi.

Rarissimo nell' intestino del *Chrysophrys aurata*, Linn.

Catania, aprile 1902.

(5) **Podocotyle furcatum**, Bremser.

Raro nell' ultima porzione dell' intestino della *Solea vulgaris*, Cuv.

Oltremodo raro nell' ultima porzione dell' intestino del *Mullus surmuletus*, Linn.

Catania, agosto 1902.

(6) **Podocotyle pachisomum**, Eisenh.

Poco comune nell' intestino del *Mugil cephalus*, Cuv.

Catania, Lago di Lentini, maggio 1902.

(7) **Podocotyle retroflexum**, Molin.

Rarissimo in mezzo al muco della porzione anteriore dello intestino del *Belone acus*, Riss. e dell' *Exocoetus volitans*, Linn.

Catania, Aci-Trezza, agosto settembre 1902.

Gen. Apoblema, Dujardin

(8) **Apoblema appendiculatum**, Rudolphi.

In rari esemplari nel ventricolo e nell' intestino del *Lophius piscatorius*, Linn., dello *Scomber scombrus*, Linn. e dello *Scomber colias* , Gmel.

Catania, Augusta, maggio, novembre 1902.

(9) **Apoblema rufoviride**, Rudolphi.

Qualche esemplare nello stomaco dell'*Anguilla vulgaris*, Turt. e del *Conger vulgaris*, Cuv.

Lago di Lentini, Catania, maggio, novembre 1902.

(10) **Apoblema Stossichii**, Monticelli.

Estremamente raro nel muco dell' esofago e dello stomaco dell' *Alosa sardina*, Riss.

Catania, giugno 1902.

GEN. DISTOMA. Retzius

Subgen. Brachycoecum, Railliet

(11) **Distoma brusinae.** Stossich.

Oltremodo raro nella cloaca dell' *Oblata melanura*, Cuv.

Catania, maggio 1902.

(12) **Distoma mormyri.** Stossich.

Raro nell' intestino del *Pagellus mormyrus*, Cuv.

Catania, agosto 1902.

Subgen. Brachylaimus, Dujardin

(13) **Distoma umbrinae.** Stossich.

Rarissimo nell' intestino dell' *Umbrina cirrhosa*, Cuv.

Catania, Agosto 1902.

(14) **Distoma ascidia.** Rudolphi

In rari esemplari nell' intestino del *Box boops*, Cuv. e del *Pagrus vulgaris*, Cuv.

Catania, maggio, giugno 1902.

Subgen. Dicrocoelium, Dujardin

(15) **Distoma pulchellum.** Rudolphi.

Poco frequente nell' intestino del *Gobius jozo*, Linn.

Catania, novembre 1902.

(16) **Distoma labracis.** Dujardin.

In rarissimi esemplari nell' intestino del *Labrax lupus*, Cuv.

Catania, Augusta, maggio 1902.

(17) **Distoma micracanthum.** Stossich.

Oltremodo raro nell' intestino del *Pagellus erythrinus*, Cuv.

Catania, luglio 1902.

(18) **Distoma scorpaenae.** Rudolphi.

In rarissimi esemplari nel muco dell' intestino della *Scorpaena lutea*. Riss.

Catania, Ognina, Aci-Trezza, luglio 1902.

(19) **Distoma fasciatum.** Rudolphi.

Molto raro nell' intestino retto del *Crenilabrus coeruleus*, Riss. e del *Serranus scriba*, C. V.

Catania, luglio agosto 1902.

(20) **Distoma bacillare.** Molin.

Poco frequente nell' intestino dello *Scomber scombrus*. Linn.

Catania, maggio 1902.

SPECIE DUBBIE

(21) **Distoma clavatum.** Rudolphi.

In rarissimi esemplari nel ventricolo del *Pelamys sarda*. Cuv.

Catania, giugno 1902.

(22) **Distoma** sp.

Una sola volta osservato ed in unico esemplare nello stomaco del *Julis pavo*, Hasselq.

Catania, giugno 1902.

(23) **Distoma** sp.

In rarissimi esemplari nel ventricolo del *Trachurus trachurus*, Cuv.

Catania, Giugno 1902.

(24) **Distoma** sp.

Rarissimo, incistato nel cuore del *Mugil cephalus*, Cuv.

Catania, maggio 1900.

Gen. Echinostoma, Dujardin

(25) **Echinostoma nigroflavum**, Rudolphi.

In alcuni esemplari nel ventricolo dell' *Orthagoriscus mola*, Schneid.

Catania, novembre 1902.

(26) **Echinostoma perlatum**, Rudolphi.

In numerosi esemplari nel muco dello stomaco e dell' intestino della *Tinca vulgaris*, Cuv. — È da osservare che talvolta nello stomaco della *Tinca* il parassita trovasi agamo, mentre sempre è a completo sviluppo nell' intestino.

Pantani della Piana di Catania, Lago di Lentini, giugno 1900-1902.

(27) **Echinostoma cesticillus**, Molin.

In diversi esemplari nel muco dell' intestino della *Torpedo ocellata*, Bel., dell' *Umbrina cirrhosa*, Linn. e della *Seriola Dumerilii*, Riss.

Catania, maggio 1900, agosto 1902.

(28) **Echinostoma lydiae**; Stossich.

In discreto numero di esemplari nel muco intestinale dell' *Orthagoriscus mola*, Schn.

Catania, maggio 1902.

FORME AGAME

(Agamodistoma, Stossich)

(29) **Agamodistoma valdeinflatum**, Stossich.

Qualche esemplare sparso quà e là e racchiuso in cisti sferiche e trasparenti nella cavità peritoneale del *Gobius jozo*, Linn.

Catania, novembre 1902.

Fam. Didymozoonidae, Monticelli

Gen. Didymozoon, Taschenberg

(30) **Didymozoon thynni**, Taschenberg.

Negli archi branchiali e nel palato del *Thynnus vulgaris*, Cuv. talvolta e in numero esiguo rinvengonsi delle piccole sporgenze, le quali incidendole attentamente lasciano venir fuori delle cisti della grossezza ed apparenza di un piccolo pisello. Al posto di dette sporgenze si può osservare anche l' impronta rimasta.

Tali cisti sono di un colorito giallo, simile a quello dell'oro antico. Pungendo e comprimendo accuratamente tali cisti vengon fuori due piccoli elminti, similmente eguali fra loro. Son costituiti da due parti: una *posteriore* ingrossata, ed una *anteriore* assottigliata a mo' di filo. I due elminti stanno a contatto fra loro entro la cisti per mezzo della parte posteriore.

Tonnara di S. Panagia (Siracusa), maggio 1902.

(31) **Didymozoon sphyraenae**, Taschenberg.

In rare cisti aderenti alla mucosa boccale della *Sphyraena vulgaris*, C. V.

Catania, giugno 1902.

Fam. Monostomidae, Monticelli

Gen. Monostoma, Zeder

(32) **Monostoma orbiculare**. Rudolphi.

Qualche raro esemplare nell' intestino del *Box salpa*, Cuv. e dell' *Oblata melanura*, Cuv.

Catania, aprile, giugno 1902.

(33) **Monostoma capitellatum**. Rudolphi.

Oltremodo raro nell' intestino del *Box salpa*, Cuv.

Catania, aprile, 1902.

(34) **Monostoma spinosissimum**. Stossich.

Rarissimo nell' intestino del *Box salpa*, Cuv.

Catania, maggio 1902.

ORDO CESTODES

Fam. Taeniidae

Subfam. Mesocestoidinae

Gen. Mesocestoides, Vaillant

(35) **Taenia macrocephala**. Creplin.

In qualche raro esemplare aderente alla mucosa dell' intestino dell' *Anguilla vulgaris*, Turt. L' adesione era talmente forte, che le proglottidi facilmente si spezzettavano alla più delicata trazione. Tanto lo scolice, quanto le proglottidi erano grandemente cosparsi di corpuscoli calcarei.

Lago di Lentini, Pantani della Piana di Catania, aprile 1902.

Fam. Bothriocephalidae

Subfam. Diplogonoporidae

Gen. Diplogonoporus, Lönnberg

(36) **Diplogonoporus wageneri**, Monticelli.

Poco frequente e sempre aderente alla mucosa intestinale del *Centrolophus pompilius*, Cuv.

Catania, maggio 1902.

Subfam. Monogonoporidae.

Gen. Anchistrocephalus, Monticelli

(37) **Anchistrocephalus microcephalus**, Rudolphi.

Qualche esemplare nell' intestino dell' *Orthagoriscus mola*, Schn.

Catania, novembre 1902.

Gen. Bothriocephalus, Rudolphi

(38) **Bothriocephalus crassiceps**, Rudolphi.

Rarissimo nell' intestino del *Merlucius vulgaris*, Cuv.

Augusta, Catania, aprile 1902.

(39) **Bothriocephalus belones**, Dujardin.

Abbastanza raro nell' intestino del *Belone acus*, Risso.

Catania, settembre 1902.

Gen. Bothriotaenia, Railliet

(40) **Bothriotaenia plicata**, Rudolphi.

Frequentemente ed in discreto numero di esemplari, con l' estremità anteriore infissa nei caratteristici cuniculi scavati

nel retto intestino dello *Xiphias gladius*, Linn. Qualche individuo perfora la parete dell' intestino sino alla tunica sierosa, la quale si solleva in forma di cisti, ove passa lo scolice e gran parte del corpo. Qualche altro individuo perfora addirittura anche lo strato peritoneale dell' intestino e sporge libero nella cavità peritoneale, ovvero si fa strada fra le anse intestinali e fra le pieghe peritoneali.

Messina, maggio-giugno 1902.

Fam. Ligulidae

Gen. Ligula, Bloch.

(41) **Ligula simplicissima**, Rudolphi.

In discreto numero di esemplari e con una certa frequenza nella cavità peritoneale della *Tinca vulgaris*, Cuv.

In tali *Tinche* il ventre e i fianchi si presentavano alquanto dilatati e talvolta di un colorito un po' più chiaro dell' ordinario, cosicchè, acquistando una certa pratica, si riusciva facilmente a constatarne la presenza anche prima di aprirne la cavità peritoneale. In alcune di esse, inoltre, un po' più al di sopra dell' apertura anale, si notava una leggiera prominenza alquanto molle, sotto la quale palpavasi benissimo l' elminto, in altre, invece, tale prominenza era aperta e da essa vedevasi fuoriuscire un pezzetto del parassita in discorso, oltre ad un po' di muco misto a pus gialliccio. — Il numero delle *Ligule* per ogni ospiste era variabile, e dalle tante osservazioni fatte si potè stabilire che andava da 1 a 6. La lunghezza loro era da cm. 8 a 25; la larghezza da mm. 5 a 12.

Facendo con un coltello ben tagliente delle sezioni trasversali di esse *Tinche*, da uno sguardo sommario di esse si poteva benissimo rilevare, che i parassiti si frammettevano fra i varî organi addominali, accerchiandoli nelle loro volute e perforandone il mesentere.

Circa alle alterazioni che la *Tinca* subisce per la presenza di tali *Ligule*, sempre riferendosi ai tagli suddetti, si può dire che il fegato è più o meno compresso, talvolta anche fortemente, i testicoli sono atrofici, come anche gli ovarî, la vescica natatoria spostata in basso leggermente in alcune, in altre, invece, grandemente, subendo anche un certo grado di schiacciamento. Presentano pure uno spostamento leggermente in basso e una leggiera compressione lo stomaco e l'intestino. — È da aggiungere, che talvolta dalla cavità addominale tali *Ligule* riescono a penetrare nei muscoli della parete circostante, scavandovi una specie di doccia.

Da quanto si è detto si può dedurre che gli organi maggiormente interessati sono gli ovarî e i testicoli. Si è, adunque, dinanzi ad una vera *castrazione parassitaria* della *Tinca* dovuta alle *Ligule*, simile a quella che per le *Aterine* constatarono *C. Parona* e *F. Mazza* (Sulla castrazione temporanea delle *Aterine* dovuta ad Elmintiasi. Com. fatta al Congresso zoologico di Bologna del 1900. Boll. dei Musei di Zool. e Anat. comp. della R. Univ. di Genova, n. 97, 1900).

Tale castrazione è pure temporanea, perchè accurate ricerche fatte in altre epoche dell'anno hanno avuto risultato negativo. — Oltre a ciò è da notarsi che da varî anni, a dir dei pescatori, le *Tinche* diminuiscono grado a grado, il che, forse, può stare in rapporto a questa castrazione parassitaria.

Lago di Lentini, Pantani della Piana di Catania, aprile-maggio 1902.

Fam. Tetraphyllidae

Subfam. Phyllobotrhiinae.

GEN. ANTHOBOTHRIUM, Van-Beneden

(42) **Anthobothrium musteli**, Van-Beneden.

Raro nell'intestino del *Mustelus vulgaris*, Müll. Henl.

Catania, maggio 1900, giugno 1902.

GEN. PHYLLOBOTHRIUM, Van-Beneden.

(43) **Phyllobothrium tridax**, Van-Beneden.

Rarissimo e poco aderente nella valvola intestinale della *Squatina angelus*, Dum.

Catania, aprile 1902.

(44) **Phyllobothrium lactuca**, Van-Beneden.

In rarissimi esemplari nell' intestino del *Mustelus vulgaris*, Müll-Henl.

Catania, giugno 1900; aprile 1902.

(45) **Phyllobothrium gracile**, Wedl.

Qualche raro esemplare poco aderente nell' intestino del *Rhynobatus columnae*, M. H. e nella valvola intestinale della *Torpedo marmorata*, Riss.

Catania, aprile, dicembre 1902.

GEN. ECHENEIBOTHRIUM, Van-Beneden.

(46) **Echeneibothrium myliobatis aquilae**, Wedl.

Raro nell' intestino del *Myliobatis aquila*, C. Dumer.

Catania, dicembre 1902.

(47) **Echeneibothrium minimum**, Van-Beneden.

Qualche raro esemplare poco aderente alla valvola spirale del *Trygon pastinaca*, Cuv.

(48) **Echeneibothrium variabile**, Van-Beneden.

Rarissimo nell' intestino della *Raja clavata*, Rond.

Catania, aprile 1902.

Subfam. Phyllacanthinae

GEN. CALLIOBOTHRIUM, Van-Beneden.

(49) **Calliobothrium coronatum**, Rudolphi.

Qualche raro esemplare nell' intestino del *Mustelus vulgaris*, Müll. Henl.

Catania, Augusta, Siracusa, aprile-maggio 1902.

(50) **Calliobothrium filicolle**, Zschokke.

Comune nella valvola spirale del *Mustelus vulgaris*, Müll. Henl., della *Torpedo ocellata*, Bel., della *Raja clavata*, Rond. del *Myliobatis aquila*, C. Dumer.

Catania, giugno 1900, maggio 1902.

Fam. Phyllorhynchidae

GEN. RHYNCHOBOTHRIUM, Rudolphi

(51) **Rhynchobothrium corollatum**, Rudolphi.

Raro nella valvola intestinale dell' *Acanthias vulgaris*, Riss.

Catania, aprile 1902.

(52) **Rhynchobothrium paleaceum**, Rudolphi.

Qualche rara volta ed in esiguo numero incistato fra i muscoli branchiali e sotto il cuore del *Mullus barbatus*, Linn.

Catania, Aci-Trezza, agosto 1902.

(53) **Rhynchobothrium gracile**, Wagener.

Oltremodo frequente ed in numerossimi esemplari nel fegato dell' *Orthagoriscus mola*, Schneid. In tali casi il fegato acquista un aspetto *sui generis*. La superficie, ricoperta dalla glissoniana, ha un colorito marrone chiaro e presentasi tempestata da rilievi aventi un aspetto veramente di bolle. Tale glissoniana

è poco aderente al tessuto epatico sottostante, in modo da potersi quasi sollevare. Togliendola, grossolanamente come si può, comparisce una quantità veramente stragrande di corpiccinoli rotondeggianti, grossi quanto un grosso cece o poco più ed infossati nel tessuto epatico sottostante. Ognuno di questi corpiccinoli ha, come appendice, un cordoncino vermiforme incuneato nel tessuto sottostante, il quale va diritto per un piccolo tratto, poi fa delle curve in certo qual modo sinuose, per finire poi ad un tratto a conficcarsi nel parenchima epatico. Staccando qualcuno di tali cordoncini si osserva che ha una struttura *debolissima*.

Facendo con un bisturi un taglio del fegato, si osserva che esso è tutto finamente tramezzato da tali corpiccinoli con le relative appendici.

Catania, aprile, maggio, novembre 1902.

(54) Rhynchobothrium smaridum, Pintner.

In pochi esemplari e con una certa frequenza nella cavità peritoneale della *Maena vulgaris*, Cuv. e della *Maena osbeckii*, Cuv.

Catania, agosto, novembre 1902.

Gen. Tetrarhynchus, Rudolphi

(55) Tetrarhynchus tetrabotrhium, Van-Beneden.

Qualche raro esemplare nell' intestino del *Mustelus vulgaris*, Müll-Henl. Rarissimo, allo stato larvale, nel ventricolo del *Pelamys sarda*, Cuv.

Catania, giugno 1900 ; aprile, giugno 1902.

(56) Tetrarhynchus erinaceus, Van-Beneden.

In rari esemplari adulti e liberi nell' intestino della *Raja clavata*, Rond. — Qualche rarissimo esemplare incistato nei muscoli e nel peritoneo del *Gadus minutus*, Linn. — In rari esem-

plari racchiusi in cisti nerastre nel peritoneo del *Lophius piscatorius*, Linn.

Catania, aprile 1902.

(57) **Tetrarhynchus rajae clavatae**, Wagener.

Se ne rinviene qualche raro esemplare avvolto ognuno in sottilissima cisti aderente alla parete del ventricolo della *Raja clavata* Rond.

Catania, aprile 1902.

(58) **Tetrarhynchus attenuatus**, Rudolphi.

Frequente in alcuni esemplari aderenti alle branchie e all' intestino retto dello *Xiphias gladius*, Linn.

Messina, maggio 1902.

(59) **Tetrarhynchus scombri**, Diesing.

Raramente in varî esemplari incapsulati aderenti all' appendice pilorica dello *Scomber scombrus*, Linn.

Catania, maggio 1902.

(60) **Tetrarhynchus** sp.

In discreto numero di cisti alla parete esterna dell' intestino dello *Epinephaelus gigas*, Bloch.

Catania, giugno 1900.

FORME LARVALI

SCOLEX, Müller

(61) **Scolex polymorphus**, Rudolphi.

Frequente ed in discreto numero di esemplari nell' intestino dei seguenti pesci : *Torpedo marmorata*, Riss. , *Torpedo ocellata*, Bel. , *Engraulis encrassicholus*, Cuv., *Conger vulgaris*, Cuv., *Solea vulgaris*, Cuv., *Belone acus*, Riss., *Gobius niger*, Linn., *Gobius jozo*,

Linn., *Mullus barbatus*, Linn., *Trigla corax*, Bp., *Apogon imberbis*, Lacèp., *Umbrina cirrhosa*, Cuv., *Lichia glaucus*, Cuv., *Xiphias gladius*, Linn., *Pagrus vulgaris*, Cuv., *Smaris gagarella*, C. V.
Raro nel ventricolo del *Pagrus vulgaris*, Cuv.

Catania, giugno 1900, aprile-novembre 1902.

ORDO NEMATODA

Fam. Ascaridae

Gen. Ascaris, Linn.

(62) **Ascaris adunca.** Rudolphi.

Frequente in rari esemplari nell' intestino del *Pagellus erythrinus*, Cuv.

Catania, luglio 1902.

(63) **Ascaris incurva.** Rudolphi.

Rarissimo nella prima porzione dell' intestino e nello stomaco dello *Xiphias gladius*, Linn.

Messina, maggio 1902.

(64) **Ascaris clavata.** Rudolphi.

In rari esemplari nello stomaco e nell' intestino del *Conger vulgaris*, Cuv. e del *Merlucius vulgaris*, Cuv.

Catania, Augusta, giugno 1900, luglio 1902.

FORME EMBRIONALI E LARVALI.

(65) **Ascaris belones vulgaris.** Wedl.

Qualche raro esemplare in cisti addossate alla mucosa intestinale del *Belone acus*, Risso.

Catania, agosto 1902.

(66) **Ascaris capsularia,** Rudolphi.

Tanto allo stato embrionale, quanto allo stato larvale in numerosi esemplari or racchiusi in una tenue cisti discoidale attorcigliati a spirale, or liberi in tutti gli organi della cavità addominale dei seguenti pesci: *Conger vulgaris*, Cuv., *Merlucius vulgaris*, Cuv., *Trigla corax*, Bp., *Scomber colias*, Gmel., *Auxis bisus*, Raf., *Trachurus trachurus*, Cuv., *Lepidopus argyreus*, Cuv. Allo stato larvale in una grande quantità di esemplari alla parete esterna dello stomaco del *Saurus fasciatus*, Riss. liberi ed alcuni aggrovigliati.

Catania, aprile, novembre 1902. Capo Passaro, maggio 1903.

(67) **Ascaris engraulidis**, Stossich.

In rari esemplari aderenti agli organi della cavità addominale dell'*Engraulis encrassicholus*, Cuv. e dell'*Alosa sardina*, Risso.

Catania, Augusta, aprile, giugno 1902.

(68) **Ascaris Wedli,** Stossich.

Raro nella cavità addominale del *Mullus barbatus*, Linn.

Catania, Aci-Trezza, aprile 1902.

(69) **Ascaris papilligerum,** Diesing.

In diversi esemplari nello stomaco e nell' intestino dello *Scomber scombrus*, Linn.

Catania, maggio 1902.

(70) **Ascaris scombrorum,** Stossich.

Qualche raro esemplare nella cavità addominale dello *Scomber colias*, Linn. e del *Pelamys sarda*, Cuv.

Catania, maggio, giugno, luglio 1902.

(71) **Ascaris sparoidum**, Diesing.

In discreto numero di esemplari nella cavità addominale dei seguenti pesci: *Box boops*, Cuv., *Oblata melanura*, Cuv., *Smaris gagarella*, C. V.

Catania, Ognina, giugno, agosto 1902.

(72) **Ascaris petromyzi**, Linstow.

Rarissimo nell' intestino del *Petromyzon marinus*, Linn.

Catania, Aci-Trezza, maggio 1902.

(73) **Ascaris lichiae glaucae**, Diesing.

Rarissimo ed aderente agli organi della cavità addominale della *Lichia glaucus*, Cuv.

Catania, settembre 1902.

(74) **Ascaris** sp.

Una sola volta, fra le molte osservazioni eseguite sui visceri della *Raja clavata*, Rond., si rinvengono aderenti leggermente alle pareti del ventricolo due piccole cisti della grossezza di una capocchia di spillo, di colorito bianco leggermente tendente al gialliccio, contenenti ciascuna un esemplare di *Ascaris* in forma veramente embrionale. Stante tale stato è riuscito infruttuoso il tentare un ulteriore esame.

Catania, aprile 1902.

(75) **Ascaris** sp.

Fra le molte interiora di *Xiphias gladius*, Linn. a varie riprese esaminate, una volta si ebbe l'occasione di riscontrare alcune cisti perlacee della grossezza di un piccolo pisello addossate alle pareti intestinali contenenti un po' di liquido biancastro, in mezzo al quale nuotava una forma embrionale di *Ascaris*. Per la sua incompleta struttura non se ne potè eseguire un ulteriore esame.

Messina, maggio 1902.

(76) **Ascaris** sp.

Nell'intestino retto di un *Thynnus brachypterus*, C. V. rinvengonsi alcune cisti bianco-grigiastredure, non trasparenti, della grossezza di un piccolo pisello. In ognuna vi si racchiudeva una piccolissima forma veramente embrionale di *Ascaris*, della quale riuscì vano ogni tentativo di descrizione.

S.ª Panagia (Siracusa), giugno 1902

(77) **Ascaris** sp.

Nell'intestino tenue di un *Exocoetus volitans*, Linn. in mezzo al muco si riscontrano due sole cisti di colorito biancastro, racchiudenti ognuna una piccolissima forma embrionale di *Ascaris*. Per tale conseguenza non se ne potè fare una descrizione.

Riposto, settembre 1902.

FORME INQUIRENDE

(78) **Ascaris affinis.** Orley.

Oltremodo raro nello stomaco del *Mustelus vulgaris*, Müll, et Henl.

Catania, giugno 1900.

(79) **Ascaris bramae**, Beneden.

Rarissimo nell' intestino e nello stomaco del *Brama rayi*. Schneid.

Catania, giugno 1900.

(80) **Ascaris phycidis**, Rudolphi.

Raro nelle appendici piloriche e nell' intestino del *Phycis mediterraneus*, Riss.

Aci-Trezza, giugno 1900.

(81) **Ascaris succisa**, Rudolphi.

Poco frequente nell' intestino del *Raja clavata*, Rond.

Catania, aprile 1902.

GEN. DACNITIS, Dujardin

(82) **Dacnitis foveolatus.** Rudolphi.

Raro nell' intestino del *Phycis mediterraneus*, Riss. e del *Dentex vulgaris*, Cuv.

Catania, maggio 1902, giugno 1900.

Fam. Cucullanidae

GEN. CUCULLANUS, O. F. Müller

(83) **Cucullanus orthagorisci.** Rudolphi.

Oltremodo raro nell' intestino dell'*Orthagoriscus mola*, Schn.

Catania, novembre 1902.

ORDO ACANTHOCEPHALA

GEN. ECHINORHYNCHUS, O. F. Müller.

(84) **Echinorhynchus agilis.** Rudolphi.

In rarissimi esemplari nell' intestino del *Mugil cephalus*, Cuv.

Pantani della Piana di Catania, Lago di Lentini, Golfo di Catania, agosto 1902.

(85) **Echinorhynchus propinquus.** Dujardin.

In discreto numero di esemplari nell' intestino del *Gobius jozo*, Linn. Raro nell' intestino del *Gobius niger*, Linn.

Rarissimo nell' intestino dell' *Umbrina cirrhosa*, Cuv. e della *Trigla lyra*, Linn.

Catania, aprile, luglio, agosto, dicembre 1902.

(86) **Echinorhynchus lateralis.** Molin.

Piuttosto raro nell' intestino del *Belone acus*, Riss.

Catania, agosto 1902.

(87) **Echinorhynchus pristis**, Rudolphi.

Abbastanza raro nell' intestino del *Belone acus*, Riss. e dello *Scomber colias*, Gmel.

Catania, agosto 1902.

(88) **Echinorhynchus vasculosus**, Rudolphi.

Rarissimo nell' intestino del *Phycis mediterraneus*, Riss.

Catania, agosto 1902,

(89) **Echinorhynchus angustatus**, Rudolphi.

Rarissimo nell' intestino dell' *Anguilla vulgaris*, Turt.

Lago di Lentini, Pantani della Piana di Catania, dicembre 1902.

(90) **Echinorhynchus** sp.

Qualche esemplare nello stomaco del *Pomatomus telescopium*, Riss.

Messina, maggio 1903.

(91) **Echinorhynchus** sp.

In discreto numero di esemplari piccoli di colorito giallo-rossastro, infissi nella mucosa dello stomaco del *Xiphias gladius*, Linn.

Messina, maggio 1902.

Riassunto schematico dei Pesci della Sicilia orientale riscontrati infetti da Elminti.

Petromyzonidae

1. *Petromyzon marinus*, Linn.

   Ascaris petromyzi, Linstow. . . . . . LXXII. Intestino.

Mustelidae

2. *Mustelus vulgaris*. Müll. et Henl.

   Anthobothrium musteli, Van-Ben. . . . XLII. Intestino.
   Phyllobothrium lactuca, Van-Ben. . . . XLIV. id.
   Calliobothrium coronatum, Rud. . . . . XLIX. id.
   Calliobothrium filicolle, Zschokke . . . . L. Valvola spirale.
   Tetrarhynchus tetrabothrium, Van-Ben. . . LV. Intestino.

Spinacidae

3. *Acanthias vulgaris* Riss.

   Rhynchobothrium corollatum, Rud. . . . LI. Intestino.

Squatinidae

4. *Squatina angelus*, Dum.

   Phyllobothrium tridax, Van-Ben. . . . XLIII. Pliche intestinali.

Rynobatidae

5. *Rhynobatus columnae*, M. H.

   Phyllobothrium gracile, Wedl . . . . . XLV. Intestino.

Torpedidae

6. *Torpedo marmorata*, Riss.

   Phyllobothrium gracile, Wedl . . . . . XLV. Valvola spirale.
   Scolex polymorphus, Rud. . . . . LXI. id.

7. *Torpedo ocellata*, Bel.

   Echinostoma cesticillus, Mol. . . . . . XXVII. Pliche intestinali
   Scolex polymorphus, Rud. . . . . LXI. id.

Rajidae

8. *Raja clavata*, Rond.

   Echeneibothrium variabile, Van-Ben. . . XLVIII. Intestino.
   Tetrarhynchus erinaceus, Van-Ben. . . . LVI. id.
   Tetrarhynchus rajae clavatae, Wagener . . LVII. id.

Calliobothrium filicolle, Zschokke	L.	Valvola spirale
Ascaris sp.	LXXIV.	Ventricolo
Ascaris succisa, Rud.	LXXXI.	Intestino

Myliobatidae

9. *Myliobatis aquila*, C. Dumér.

Echeneibothrium myliobatis aquilae, Wedl .	XLVI.	Intestino
Calliobothrium filicolle, Zschokke	L.	Valvola spirale

Trygonidae

10. *Trygon pastinaca*, Cuv.

Echeneibothrium minimum, Van-Ben . . .	XLVII.	Valvola spirale

Clupeidae

11. *Alosa sardina*, Riss.

Apoblema Stossichii, Monticelli.	X.	Esofago-Stomaco
Ascaris engraulidis, Stossich	LXVII.	Cavità addominale

12. *Engraulis encrassicholus*, Cuv.

Scolex polymorphus, Rud.	LXI.	Intestino
Ascaris engraulidis, Stossich	LXVII.	Cavità addominale

Cyprinidae

13. *Tinca vulgaris*, Cuv.

Echinostoma perlatum, Nordmann. . . .	XXVI.	Intestino
Ligula simplicissima, Rud.	XLI.	Cavità addominale

Scopelidae

14. *Saurus fasciatus*, Riss.

Ascaris capsularia, Rudolphi	LVI.	Parete esterna dello stomaco

Anguillidae

15. *Anguilla vulgaris*, Turt.

Apoblema rufoviride, Rud.	IX.	Stomaco
Taenia macrocephala, Creplin	XXXV.	Intestino
Echinorhynchus propinquus, Duj. . . .	LXXXV.	id.
Echinorhynchus angustatus, Rud. . . .	LXXXIX.	id.

16. *Conger vulgaris*, Cuv.

Apoblema rufoviride, Rud.	IX.	Stomaco
Scolex polymorphus, Rud.	LXI.	Intestino tenue
Ascaris clavata, Rud	LXIV.	Ventricolo-Intestino
Ascaris capsularia, Rud	LXVI.	Cavità addominale

Gadidae

17. *Gadus minutus*, Linn.

Tetrarhynchus erinaceus, Van-Ben. . . . LVI. Peritoneo-Muscoli

18. *Merlucius vulgaris*, Cuv.

Bothriocephalus crassiceps, Rud. . . . . XXXVIII. Intestino
Scolex polymorphus, Rud. . . . . LXI. id.
Ascaris clavata, Rud. . . . . LXIV. Ventricolo-Intestino
Ascaris capsularia, Rud. . . . . LVI. Cavità addominale

19. *Phycis mediterraneus*, Riss.

Ascaris phycidis, Rud. . . . . LXXX. Intestino-Appendici piloriche
Dacnitis foveolatus, Rud . . . . LXXXII. Intestino
Echinorhynchus vasculosus, Rud. . . . . LXXXVIII. id.

Pleuronectidae

20. *Solea vulgaris*, Cuv.

Podocotyle furcatum, Brems. . . . . . . V. Intestino
Scolex polymorphus, Rud. . . . . LXI. id.

Labridae

21. *Crenilabrus coeruleus*, Riss.

Distoma fasciatum, Rud. . . . . XIX. Intestino

22. *Iulis pavo*, Hasselq.

Distoma sp. . . . . XXII. Stomaco

Exocoetidae

23. *Belone acus*, Riss.

Podocotyle retroflexum, Mol. . . . . . . VII. Intestino
Scolex polymorphus, Rud. . . . . LXI. id.
Ascaris belones vulgaris, Wedl . . . . . LXV. Mucosa intestinale
Echinorhynchus lateralis, Mol. . . . . . LXXXVI. Intestino
Echinorhynchus pristis, Rud. . . . . . LXXXVII. id.

24. *Exocoetus volitans*, Linn.

Podocotyle retroflexum, Mol. . . . . . . VII. Intestino
Ascaris sp. . . . . LXXVII. Mucosa intestinale

Orthagoriscidae

25. *Orthagoriscus mola*, Schneid.

Podocotyle contortum, Rud. . . . . . . I. Branchie-Palato
Podocotyle macrocotyle, Dies. . . . . . II. Intestino retto
Echinostoma nigroflavum, Rud. . . . . XXV. Ventricolo.

Echinostoma lydiae, Stoss. . . . . . . XXVIII. Intestino.
Anchistrocephalus microcephalus, Rud. . . XXXVII. id.
Rhynchobothrium gracilis, Wagener . . . LXII. Fegato
Cucullanus orthagorisci, Rud. . . . . . . LXXXIII. Intestino

Lophiidae

26. *Lophius piscatorius*, Linn.
Apoblema appendiculatum, Rud . . . . VIII. Ventricolo. Intestino
Tetrarhynchus erinaceus, Van-Beu. . . . LVI. Peritoneo

Gobiidae

27. *Gobius jozo*, Linn.
Distoma pulchellum, Rud. . . . . XV. Intestino
Agamodistoma valdeinflatum, Stoss. . . . XXIX. Cavità addominale
Scolex polymorphus, Rud. . . . . LXI. Intestino
Echinorhynchus propinquus, Duj. . . . LXXXV. id.

28. *Gobius niger*, Linn.
Scolex polymorphus, Rud. . . . . LXI. Intestino
Echinorhynchus propinquus, Duj. . . . LXXXV. id.

Mullidae

29. *Mullus surmuletus*, Linn.
Podocotyle furcatum, Brems. . . . . . . V. Intestino

30. *Mullus barbatus*, Linn.
Rhynchobothrium paleaceum, Rud. . . . LII. Muscoli branchiali-Cuore
Scolex polymorphus, Rud. . . . . LXI. Intestino
Ascaris Wedli, Stoss. . . . . LXVIII. Peritoneo

Triglidae

31. *Trigla corax*, Linn.
Scolex polymorphus, Rud. . . . . LXI. Intestino
Ascaris capsularia, Rud. . . . . LXVI. id.

32. *Scorpaena lutea*, Riss.
Distoma scorpaenae, Rud. . , ... XVIII. Intestino

33. *Trigla lyra* Linn.
Echinorhynchus propinquus, Duj. . . . LXXXV. Intestino

Percidae

34. *Labrax lupus*, Cuv.
Distoma labracis, Duj. . . . . XVI. Intestino

35. *Serranus scriba*, C. V.
Distoma fasciatum , Rud. . . . . XIX. Intestino

36. *Epinephelus gigas*, Bloch.

Tetrarhynchus sp.	LX.	Parete esterna dell'intestino

37. *Apogon imberbis*, Lacep.

Scolex polymorphus, Rud.	LXI.	Intestino

38. *Pomatomus telescopium*, Riss.

Echinorhynchus sp.	XC.	Stomaco

Sciaenidae

39. *Umbrina cirrhosa*, Cuv.

Distoma umbrinae, Stoss.	XIII.	Intestino
Echinostoma cesticillus, Molin	XXVII.	id.
Scolex polymorphus, Rud.	LXI.	id.
Echinorhynchus propinquus, *Duj.* . . .	LXXXV.	id.

Scombridae

40. *Scomber scomber*, Linn.

Apoblema appendiculatum, Rud.	VIII.	Ventricolo-Intestino
Distoma bacillare, Molin	XX.	Intestino
Tetrarhynchus scombri, Dies.	LIX.	Appendice pilorica
Ascaris papilligerum, Dies.	LXIX.	Stomaco-Intestino

41. *Scomber colias*, Gmel.

Apoblema appendiculatum, Rud.	VII.	Stomaco
Ascaris capsularia, Rud.	LXVI.	Cavità addominale
Ascaris scombrorum, Stoss.	LXX.	id.
Echinorhynchus pristis, Rud.	LXXXVII.	Intestino

42. *Auxis bisus*, Rafin.

Ascaris capsularia, Rud.	LXVI.	Cavità addominale

43. *Thynnus vulgaris*, Cuv.

Didymozoon thynni, Taschenberg	XXX.	Branchie

44. *Thynnus brachypterus*, C. V.

Ascaris sp.	LXXVI.	Intestino retto

45. *Pelamys sarda*, Cuv.

Distoma claratum, Rud.	XXI.	Ventricolo
Tetrarhynchus tetrabothrium, Van-Ben. . .	LV.	id.
Ascaris scombrorum, Stoss.	LXX.	id.

46. *Trachurus trachurus*, Cuv.

Distoma sp.	XXIII.	Ventricolo
Ascaris capsularia, Rud.	LXVI.	Cavità addominale

47. *Lichia glaucus*, Cuv.

Scolex polymorphus, Rud. . . . . LXI. Intestino
Ascaris lichiae glaucae, Dies. . . . . . . LXXVIII. Cavità addominale

48. *Lichia amia*, Linn.

Apoblema appendiculatum, Rud. . . . . . VIII. Ventricolo

49. *Seriola Dumerilii*, Riss.

Echinostoma costicillus, Molin. . . . . . XXVII. Intestino

50. *Brama rayi*, Schneid.

Ascaris bramae, Beneden . . . . LXXIX. Stomaco-Intestino

51. *Centrolophus pompilius*, Cuv.

Diplogonoporus wageneri, Monticelli . . . . XXXVI. Intestino.

52. *Xiphias gladius*, Linn.

Bothriotaenia plicata, Rud. . . . . . . XL. Intestino retto
Tetrarhynchus attenuatus, Rud. . . . . . LXXVIII. Branchie-Intestino retto
Scolex polymorphus, Rud. . . . . LXI. Intestino.
Ascaris incurva, Rud . . . . LXIII. Porz. pilorica dello stomaco
Ascaris, sp. . . . . LXXV. Pareti intestinali
Echinorhynchus sp. . . . . XCI. Intestino

Trichiuridae

53. *Lepidopus argyreus*, Cuv.

Ascaris capsularia, Rud . . . . LXVI. Cavità addominale.

Sparidae

54. *Box boops*, Cuv.

Distoma ascidia, Rud. . . . . XIV. Intestino.
Scolex polymorphus, Rud. . . . . LXI. Intestino.
Ascaris sparoidum, Dies . . . . LXXI. Cavità addominale

55. *Box salpa*, Cuv.

Podocotyle fractum, Rud. . . . . III. Intestino
Monostoma orbiculare, Rud. . . . . . . XXXII. id.
Monostoma capitellatum, Rud. . . . . . XXXIII. id.
Monostoma spinosissimum, Stoss. . . . . XXXIV id.

56. *Oblata melanura*, Cuv.

Distoma brusinae, Stoss. . . . . XI. Cloaca
Monostoma orbiculare, Rud. . . . . . . XXXIII. Intestino
Ascaris sparoidum, Dies. . . . . LXXI. Cavità addominale

57. *Pagellus erythrinus*, Cuv.

Distoma micracanthum, Stoss. . . . . . . XVII. Intestino
Ascaris adunca, Rud. . . . . LXII. id.

58. *Pagellus mormyrus*, Linn.

Distoma mormyri, Stoss.	XII.	Intestino.

59. *Pagrus vulgaris*, C. V.

Distoma ascidia, Rud.	XIV.	Intestino.
Scolex polymorphus, Rud.	LXI.	Ventricolo.

60. *Crysophrys aurata*, Linn.

Podocotyle pedicellatum, Stoss	IV.	Intestino.

61. *Dentex vulgaris*, Cuv.

Dacnitis foveolatus, Rud.	LXXXII.	Intestino.

Maenidae.

62. *Maena vulgaris*, Cuv.

Rhynchobothrium smaridum, Pintner . . .	LIV.	Cavità addominale.

63. *Maena osbekii*, Cuv.

Rhynchobothrium smaridum, Pintner . . .	LIV.	Cavita addominale.

64. *Smaris gagarella*, C. V.

Scolex polymorphus, Rud.	LXI.	Intestino.
Ascaris sparoidum. Dies	LXXI.	Cavità peritoneale.

Mugilidae

65. *Mugil cephalus*, Cuv.

Podocotyle pachisomum, Eisenh.	VI.	Intestino.
Distoma sp.	XXIV.	Cuore.
Echinorhynchus agilis, Rud	LXXXIV.	Intestino.

Sphyrenidae

66. *Sphyraena vulgaris*, C. V.

Didymozoon sphyraenae, Taschenberg . .	XXXI.	Mucosa boccale.

INDICE ALFABETICO

N. d. specie

	N. d. specie
Distoma pulchellum, Rudolphi	15
» *scorpaenae*, Rudolphi	18
» *umbrinae*, Stossich	13
Distoma sp.	22
Distoma sp.	23
Distoma sp.	24
Echeneibothrium minimum, Van-Beneden	47
» *myliobatis aquilae*, Wedl	46
» *variabile*, Van-Beneden	48
Echinorhynchus angustatus, Rudolphi	89
» *agilis*, Rudolphi	84
» *lateralis*, Molin	86
» *pristis*, Rudolphi	87
» *propinquus*, Dujardin	85
» *vasculosus*, Rudolphi	88
Echinorhynchus sp.	90
Echinorhynchus sp.	91
Echinostoma cesticillus, Molin	27
» *lydiae*, Stossich	28
» *nigroflavum*, Rudolphi	25
» *perlatum*, Rudolphi	26
Ligula simplicissima, Rudolphi	41
Monostoma capitellatum, Rudolphi	33
» *orbiculare*, Rudolphi	32
» *spinosissimum*, Stossich	34
Phyllobothrium gracile, Wedl	45
» *lactuca*, Van-Beneden	44
» *tridax*, Van-Beneden	43
Podocotyle contortum, Rudolphi	1
» *fractum*, Rudolphi	3
» *furcatum*, Bremser	5
» *macrocotyle*, Diesing	2
» *pachisomum*, Eisenh	6
» *pedicellatum*, Stossich	4
» *retroflexum*, Molin	7
Rhynchobothrium corollatum, Rudolphi	51
» *gracile*, Wagener	53
» *paleaceum*, Rudolphi	52

Sulla teoria delle forme quadratiche Hermitiane e dei sistemi di tali forme.

Memoria del Prof. GUIDO FUBINI

È ben noto come le ricerche di Klein, Poincarè, Bianchi e Fricke condussero, per mezzo della teoria delle trasformazioni per raggi vettori reciproci del piano ossia della teoria delle trasformazioni lineari di una variabile complessa, ad un nuovo metodo per risolvere il celebre problema di riconoscere se due forme quadratiche a due, a tre, a quattro variabili sono equivalenti ed in caso affermativo di trovare tutte le trasformazioni che portano l'una nell'altra.

È scopo di una parte del presente lavoro lo studiare da questo punto di vista la teoria delle forme quadratiche ad un numero qualsiasi n di variabili, che per mezzo di una trasformazione lineare reale si possono ricondurre ad uno dei due tipi:

$$z_1^2 + z_2^2 \dots + z_{n-2}^2 + z_{n-1}^2 \pm z_n^2$$

e dei sistemi di forme di questi tipi.

Anche qui vedremo che ad ogni tale forma corrisponde un gruppo di trasformazioni conformi, che (se vale il segno $+$) è finito, nel caso opposto è infinito ed opera in uno spazio ad n—2 dimensioni. Troveremo così anche un metodo generale per definire aritmeticamente infiniti gruppi di trasformazioni conformi, la cui determinazione, come è ben chiaro, si collega intimamente all' importante problema della costruzione dei gruppi finiti di proiettività.

Al caso di sistemi di forme quadratiche vedremo invece

corrispondere dei gruppi di trasformazioni conformi, anzi di puri movimenti per spazii, che però non sono più, come l' euclideo, a curvatura costante.

L' introduzione di queste nuove metriche è tutt' altro che una cosa semplicemente formale: essa permette di ricorrere all' intuizione ed ai procedimenti della geometria per risolvere una questione algebrica. In un' ultima parte del presente lavoro faccio sommariamente lo studio delle forme Hermitiane e delle proprietà fondamentali delle metriche e dei gruppi corrispondenti, di cui qualche caso particolare soltanto fu finora studiato. La teoria dei gruppi discontinui viene così estesa in nuovi e generalissimi campi.

§ 1. — Consideriamo in uno spazio ad un numero qualunque m di dimensioni un gruppo di trasformazioni conformi, di cui nessuna infinitesima; come sappiamo per un noto teorema di Liouville tali trasformazioni per $m > 2$ non sono che prodotti di movimenti e di inversioni per raggi vettori reciproci; se $m=2$ noi ci restringeremo alla considerazione delle trasformazioni conformi di questa natura. Come è ben noto dal caso di $m = 2$, può darsi che un tal gruppo sia impropriamente discontinuo ossia che nell' intorno di ogni punto esistano coppie equivalenti di punti; è però chiaro che se noi immaginiamo il gruppo operante non sui punti dello spazio ma su altre varietà convenientemente scelte come elementi generatori dello spazio, allora il gruppo diventerà propriamente discontinuo, ossia trasformerà una generica di queste varietà in un'altra varietà a distanza finita da quella. Così p. es., come noi dimostreremo in generale, ogni gruppo di trasformazioni conformi, di cui nessuna sia infinitesima opera in modo impropriamente discontinuo nello spazio, quando per esempio si prendano come elementi generatori di questo anzichè i punti di esso, le sue sfere oppure le coppie de' suoi punti.

Possiamo anche generalizzando un noto artificio di Poincarè,

ricorrere al fatto già osservato da Klein che il gruppo delle trasformazioni proiettive di una quadrica Q in se è isomorfo al gruppo delle trasformazioni conformi di uno spazio euclideo ed è anzi simile a quest' ultimo se si pensa al gruppo come operante sui punti di Q.

Noi possiamo così al nostro gruppo sostituire un gruppo di proiettività in uno spazio S_{m+1} a $m+1$ dimensioni, che lasciano fissa una quadrica; è questo appunto il principio, che stabilisce in generale la relazione, che lega la teoria dei gruppi conformi alla teoria delle forme quadriche.

Sia dunque in S_m un gruppo conforme senza trasformazioni infinitesime e sia S_{m+1} uno spazio che contiene S_m.

Consideriamo uno dei semispazii, in cui S_m divide S_{m+1}.

Per ogni punto A di questo semispazio passeranno ∞^m ipersfere col centro in S_m, che taglieranno S_m in altre ∞^m ipersfere subordinate.

Una operazione T del nostro gruppo trasformerà queste ultime ∞^m ipersfere di S_m in altre ∞^m ipersfere di S_m, per ognuno delle quali passa una ed una sola ipersfera di S_{m+1} che abbia comune con essa il centro.

Le ∞^m ipersfere di S_{m+1} così determinate passano tutte, come è facile dimostrare per uno stesso punto A' del semispazio considerato e che noi considereremo come il trasformato di A.

Ad ogni trasformazione T del nostro gruppo corrisponde così una trasformazione in sè del nostro semispazio, che è facile riconoscere conforme; se anzi noi consideriamo in questo semispazio rappresentato conformemente uno spazio R a curvatura costante negativa, del cui assoluto lo spazio S_m sia l' immagine, noi vediamo facilmente che queste trasformazioni non sono che l' immagine di movimenti di R.

Noi dimostreremo che un gruppo di movimenti per uno spazio a curvatura costante, che non contenga trasformazioni infinitesime, è propriamente discontinuo e ne verrà così dimo-

strato che il nostro gruppo (che per ipotesi non ha trasformazioni infinitesime) è propriamente discontinuo, quando lo si consideri operante sul semispazio S_{m+1}; di più, poichè ad una geodetica od a un iperpiano di R corrispondono rispettivamente nel nostro semispazio un cerchio od una ipersfera che tagliano ortoganalmente S_m in una coppia di punti o in una ipersfera e viceversa, ne verrà pure dimostrato che il nostro gruppo opera in modo propriamente discontinuo anche in S_m, purchè si pensi S_m come luogo delle sue sfere oppure come luogo delle coppie de' suoi punti. Se anzi noi pensiamo lo spazio R generato dai suoi piani anzichè dai suoi punti, possiamo dire che in sostanza l' artificio di Poincarè si riduce a considerare S_m come luogo di sfere; osservazione questa, che mette il suddetto artifizio sotto una nuova luce e ne fa vedere meglio l' intima essenza.

Viceversa a ogni gruppo discontinuo di movimenti di uno spazio a curvatura costante si può nel modo succitato far corrispondere un gruppo di trasformazioni conformi per uno spazio euclideo; nei primi paragrafi seguenti ci volgeremo allo studio di tali gruppi di movimenti, dedicandoci anzitutto allo studio dei singoli movimenti, o in altre parole allo studio delle proiettività che lasciano fissa una quadrica.

§ 2. — Sia $z'_i = \Sigma\, b_{ik} z_k$ $(i, k = 1, 2, \dots n)$ una proiettività P che lasci fissa una forma quadrica Q non degenere a n variabili e sia ± 1 il suo determinante $| b_{ik} |$. Come è ben noto

$$| b_{ik} - \varepsilon_{ik}\, \rho | = 0$$

dove ε_{ik} è uguale a uno oppure nullo, secondo che i, k sono uguali o no tra di loro, è la cosidetta equazione caratteristica della proiettività stessa. A ogni radice ρ_1 di questa equazione corrisponde uno spazio lineare di punti che la proiettività lascia fissi, spazio definito dalle equazioni

$$\rho_1\, z_i = \sum_k b_{ik}\, z_k \quad (\nu, k = 1, 2, \dots . n).$$

Noi diciamo che una radice ρ_1 è generale quando il numero delle dimensioni di questo spazio è uguale all'ordine della moltiplicità di questa radice diminuito di 1. Ricordiamo poi che ogni trasformazione lineare sulle variabili non muta le radici dell' equazione caratteristica. Usiamo di una tale trasformazione (a determinante 1) per ridurre la forma Q al tipo

$$k\,(z_1^2 + \ldots\ldots + z_n^2) \qquad (k = \text{cost.})$$

Sarà allora la nostra trasformazione una trasformazione ortogonale; siano ρ_1, ρ_2 due radici uguali o distinte della nostra equazione caratteristica e siano $A_1 = (z'_1 \ldots z'_n)$, $A_2 = (z''_1\ z''_2 \ldots z''_n)$ due punti corrispondenti rispettivamente all' una e all' altra delle due radici, punti che se $\rho_1 = \rho_2$ possono anche coincidere. Sarà

$$\rho_1\, z'_i = \sum_k b_{ik}\, z'_k\ ;\quad \rho_2\, z''_i = \sum_k b_{ih}\, z''_h$$

e perciò

$$\rho_1\, \rho_2 \sum_i z'_i\, z''_i = \sum_{i,k,h} b_{ik}\, b_{ih}\, z'_k\, z''_h = \sum_{k,h} \left[\sum_i b_{ik}\, b_{ih}\, z'_k\, z''_h \right].$$

Poichè la trasformazione è ortogonale, avremo in fine:

$$\rho_1\, \rho_2 \sum_i z'_i\, z''_i = \sum_i z'_i\, z''_i$$

ossia

$$(\rho_1\, \rho_2 - 1) \sum_i z'_i\, z''_i = 0.$$

Se perciò $\rho_1 \rho_2 \neq 1$ sarà: $\Sigma_i\, z'_i\, z''_i = 0$ ossia:

Se due punti lasciati fissi da P *corrispondono a due radici uguali o distinte non reciproche, essi sono coniugati rispetto alla quadrica* Q = 0.

Un punto lasciato fisso da P *corrispondente a una radice differente da* ± 1 *è coniugato di sè stesso ossia giace su* Q = 0.

Con una trasformazione lineare è ben noto che noi possiamo ridurre la proiettività P a particolari forme canoniche.

Per chiarezza a una proiettività su m variabili del tipo

$$z'_1 = a\, z_1 \quad \text{se} \quad m = 1$$

oppure

$$z'_1 = a\,(z_1 + z_2)\,;\; z'_2 = a\,(z_2 + z_3);\; \ldots\,;\; z'_{m-1} = a\,(z_{m-1} + z_m)\,;\; z'_m = a\, z_m \quad \text{se} \quad m > 1$$

dove $a =$ costante, daremo il nome di proiettività ad m cicli di radice a: un noto teorema ci dice che data una proiettività qualunque noi con un cambiamento di coordinate potremo ridurla al prodotto di più proiettività ad uno o più cicli tutte operanti su variabili indipendenti e distinte, le cui radici sono precisamente le radici dell'equazione caratteristica.

Quelli poi di questi cicli, che corrispondono a una radice generale dell' equazione si possono supporre tutti ad un sol termine. Consideriamo due cicli corrispondenti a due radici ρ_1, ρ_2 non reciproche, distinte o no.

Siano $(z, \ldots\ldots\, z_p)$ e $(z_{p+1} \ldots\ldots\, z_q)$ le variabili da cui dipendono rispettivamente: sarà: $z'_1 = \rho_1\,(z_1 + z_2)\,;\; \ldots\ldots\,;\; z'_{p-1} = \rho_1\,(z_{p-1} + z_p)\,;\; z'_p = \rho_1\, z_p\,;\; z'_{p+1} = \rho_2\,(z_{p+1} + z_{p+2})\,;\ldots\ldots\,;\; z'_q = \rho_2\, z_q$.

Prendiamo quelli dei termini di Q che contengono soltanto variabili dell' uno o dell'altro di questi due cicli e sia Q' il loro insieme; sarà:

$$Q' = \sum_{i,k=1}^{q} a_{ik}\, z_i\, z_k$$

ed evidentemente dovrà essere

$$\sum_{i,k=1}^{q} a_{ik}\, z'_i\, z'_k = \sum_{1}^{q} a_{ik}\, z_i\, z_k\,.$$

Sostituiamo alle z'_i, z'_k i loro valori, ricordando che $\rho_1\,\rho_2 \neq 1$, confrontiamo in questa equazione da ambe le parti successiva-

mente i coefficienti di $z_1 z_{p+1}$, $z_1 z_{p+2}$, ... ; $z_1 z_q$, $z_2 z_{p+1}$, ... $z_2 z_q$, $z_3 z_{p+1}$, ..., $z_3 z_q$ ecc.

Troviamo tosto che $a_{1,p+1} = \ldots = a_{1q} = a_{2p+1} = \ldots = a_{2q} = \ldots = 0$ ossia abbiamo il teorema:

Se noi prendiamo come variabili quelle, per cui P è ridotta a forma canonica, la forma Q appare somma di più forme parziali, ciascuna delle quali non può dipendere che o dalle variabili dei cicli corrispondenti ad una stessa radice, o dalle variabili, da cui dipendono i cicli corrispondenti ad una coppia di radici reciproche.

§ 3. — Premesse queste osservazioni generali, immaginiamo ora che P, Q siano a coefficienti reali e che Q sia con una trasformazione reale riducibile al tipo:

$$k\,(z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2 - z_n^2)\,. \quad (k = \text{costante}).$$

Osserveremo che se noi riduciamo P a forma canonica nel modo suesposto, potremo supporre che le variabili, le quali compariscono in cicli corrispondenti a radici reali, siano tutte reali, mentre le variabili che compariscono in un ciclo corrispondente a una radice complessa, siano immaginarie coniugate di quelle che compariscano nel ciclo corrispondente alla radice immaginaria coniugata dell'equazione caratteristica. Osserviamo intanto:

Le radici immaginarie dell'equazione caratteristica hanno per modulo l'unità.

Oltre alle eventuali radici ± 1, l'equazione caratteristica non ammette altre radici reali, oppure ammette una coppia di radici reali reciproche.

Infatti se una radice complessa ρ_1 non avesse l'unità per modulo, essa e la sua immaginaria coniugata ρ_2 non sarebbero reciproche; sia A un punto (immaginario) lasciato fisso da P corrispondente a ρ_1 e sia A' l'immaginario coniugato corrispondente a ρ_2. La retta AA' sarebbe evidentemente reale; ora

$\rho_1 \neq \pm 1$, $\rho_2 \neq \pm 1$ perchè ρ_1, ρ_2 sono immaginarii; per ipotesi $\rho_1 \rho_2 \neq +1$. Quindi A, A' sarebbero sulla quadrica $Q = 0$ e sarebbero coniugati rispetto ad essa; la retta *reale* AA' toccherebbe $Q = 0$ in A e in A' e perciò giacerebbe su Q; ciò che è assurdo perchè una quadrica del tipo $z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2 \pm z_n^2 = 0$ non contiene rette reali.

Esista ora una radice reale $\rho_1 \neq \pm 1$; a essa corrisponderà almeno un punto reale lasciato fisso da P posto su $Q = 0$; ma ora due punti reali di $Q = 0$ non possono essere coniugati, perchè altrimenti la retta reale che li congiunge giacerebbe su $Q = 0$; quindi per un teorema precedente di radici reali della equazione caratteristica differenti da ± 1 ne esiste o nessuna o una soltanto oppure esiste una coppia di radici reciproche; ma ora il determinante di P è ± 1; quindi il prodotto di tutte le radici dell' equazione caratteristica è in valore assoluto uguale a 1; poichè le radici immaginarie hanno l' unità per modulo, ne viene dunque che anche il prodotto delle sole radici reali è uguale a $+1$ in valore assoluto; e perciò di radici reali differenti da ± 1 non ve ne può essere una soltanto; e per quanto abbiamo detto o ne esisterà nessuna, oppure esisterà una sola coppia di radici reali reciproche.

Se una radice ρ *dell' equazione caratteristica, reale od immaginaria è differente da* ± 1, *essa è una radice generale, ossia i cicli, che le corrispondono sono ad un sol termine.*

Infatti se ρ è immaginaria, esisterà anche la radice immaginaria coniugata $\sigma = \frac{1}{\rho}$; se ρ è reale esisterà per il teorema precedente anche la radice $\sigma = \frac{1}{\rho}$. Sia:

$$z_1' = \rho \, (z_1 + z_2) \, ; \quad z_2' = \rho \, (z_2 + \varepsilon \, z_3) \ldots \ldots$$

(dove $\varepsilon = 0$, oppure $\varepsilon = 1$) un ciclo a più di un termine corrispondente alla radice ρ. Sia $z_k' = \sigma z_k$, oppure $z_k' = \sigma (z_k + z_{k+1}) \ldots\ldots$ un ciclo ad uno o più termini corrispondente alla radice σ.

Al solito indichiamo con $\Sigma \, a_{ik} \, z_i \, z_k$ la forma Q; sarà:

$\Sigma\, a_{ik}\, z'_i\, z'_k = \Sigma\, a_{ik}\, z_i\, z_k$; sostituendo per z'_i, z'_k i loro valori, ricordando che P è ridotta a forma canonica e confrontando i coefficienti di $z_2\, z_k$ nei due membri, troviamo $b_{1k} = 0$ ossia il punto che ha nulle tutte le coordinate eccetto la z_1 e quello che ha nulle tutte le coordinate eccetto la z_k sono coniugati rispetto alla quadrica $Q = 0$, pur giacendo, come sappiamo, ambedue sopra $Q = 0$. Ora se ρ, σ sono reali, questi due punti, come già osservammo, sono reali; se ρ, σ sono immaginarie, essi si possono supporre immaginarii coniugati; in ogni caso dunque la retta che li congiunge è reale; per un ragionamento già usato essa dovrebbe giacere su $Q = 0$ ciò che è assurdo.

Se l'equazione caratteristica ammette radici reali distinte da ± 1, e perciò ne ammette una coppia, queste non soltanto sono generali ma anche sono semplici, ossia ad ognuna di esse corrisponde un solo punto lasciato fisso da P.

Infatti per il teorema precedente una radice reale differente da ± 1 è generale; ossia se essa è k.upla le corrisponde uno spazio lineare, lasciato fitto da P a $k - 1$ dimensioni che giacerebbe su $Q = 0$. E poichè $Q = 0$ non contiene spazii lineari a 1 o più dimensioni, è $k = 1$.

Se il determinante della P *è* $+1$ (-1) *le radici uguali* a -1 *sono in numero pari (dispari); le radici uguali a* $+1$ *sono in numero pari o dispari secondo che il numero delle variabili è pari o dispari (dispari o pari).*

Infatti il prodotto di tutte le radici è uguale evidentemente al determinante della forma; ora per i teoremi precedenti il prodotto di tutte le radici differenti da ± 1 è uguale all'unità; quindi le radici uguali a -1 sono in numero pari o dispari secondo che il determinante è $+1$ o -1; la seconda parte del teorema enunciato resta allora evidente, perchè il numero totale delle radici è uguale al numero delle variabili, le radici immaginarie sono (come si sa dalla teoria generale delle equazioni algebriche a coefficienti reali) in numero pari e le radici

differenti da ± 1 o non esistono, oppure sono in numero di 2. (*)

Noi abbiamo visto già che le radici differenti da ± 1 sono generali; vogliamo ora esaminare più particolarmente le radici uguali a ± 1. Esista per es. una radice uguale a $+1$.

Se una radice dell' equazione caratteristica è $\rho = +1$, a essa non possono corrispondere due o più cicli non generali.

Siano infatti per es. due cicli non generali:

$$z'_1 = z_1 + z_2 \qquad z'_h = z_2 + z_3 \, \ldots \ldots$$

$$z'_k = z_k + z_{k+1} \qquad z'_{k+1} = z_{k+1} + z_{k+2} \, \ldots$$

Sarà al solito

$$\Sigma \, a_{ik} \, z_i \, z_k = \Sigma \, a_{ik} \, z'_i \, z'_k \, .$$

Confrontiamo da una banda e dall' altra i coefficienti di $z_1 \, z_2$ e di $z_k \, z_{k+1}$, $z_1 \, z_{k+1}$. Troviamo tosto $a_{1k} = a_{11} = a_{kk} = 0$.

E perciò la retta *reale* luogo dei punti che hanno nulle tutte le coordinate eccetto che la z_1 e la z_k giace tre $Q = 0$, ciò che è assurdo.

Dunque di cicli a più di un termine ve ne è uno solo al massimo. Ve ne sia uno effettivamente. Io dico che:

Se un ciclo corrispondente alla radice $\rho = 1$ ha più di un termine, esso è un ciclo a tre termini.

Esista un ciclo a k termini corrispondente alla radice $\rho = 1$

$$z'_1 = z_1 + z_2 \, ; \ldots \, ; \, z'_{k-1} = z_{k-1} + z_k \, ; \, z'_k = z_k \, .$$

Dalla forma Q scegliamo quei termini che dipendono soltanto dalle variabili di questo ciclo, ossia

$$\sum_1^k a_{rs} \, z_r \, z_s$$

(*) Come corollario si trae tosto che se il determinante è uguale a $+1$, e se il numero delle variabili è dispari, esiste almeno una radice uguale a $+1$; ciò avviene p. es. nel caso che $Q = 0$ si riduca a una conica, ciò che è del resto ben noto.

Sarà

$$\sum_1^k a_{rs}\, z_r^1\, z_s^1 = \sum_1^k a_{rs}\, z_r\, z_s$$

ossia

$$z_2 \left| 2\,(a_{11}\, z_1 + \ldots + a_{1k}\, z_k) + (a_{11}\, z_2 + \ldots + a_{1,k-1}\, z_k) \right| +$$

$$+\, z_3 \left| 2\,(a_{21}\, z_1 + \ldots + a_{2k}\, z_k) + (a_{21}\, z_2 + \ldots + a_{2,k-1}\, z_k) \right| +$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+\, z_k \left| 2\,(a_{k-1,1}\, z_1 + \ldots + a_{k-1,k}\, z_k) + (a_{k-1,1}\, z_2 + \ldots + a_{k-1,k-1}\, z_k) \right| = 0.$$

Se noi conveniamo che le a, di cui un indice è lo zero, sono nulle, troviamo annullando il coefficiente di $z_t\, z_d$ in questa espressione che:

$$2a_{t-1,d} + a_{t-1,d-1} + 2a_{t,d-1} + a_{t-1,d-1} = 0$$

oppure, se $t = d$,

$$2a_{t-1,d} + a_{t-1,d-1} = 0$$

ossia in generale:

$$a_{t-1,d} + a_{t-1,d-1} + a_{t,d-1} = 0 \qquad (t,d = 1,2,\ldots,k)$$

Sia ora k pari e precisamente $k = 2h$.

Ponendo successivamente:

$t = 1$, $d = 2, \ldots, k$ troviamo $a_{1,1} = a_{1,2} = \ldots = a_{1,k-1} = 0$

$t = 2$, $d = 3, \ldots, k$ » $a_{2,2} = \ldots = a_{2,k-2} = a_{1,k} + a_{2,k-1} = 0$

$t = 3$, $d = 4, \ldots, k-1$ » $a_{3,3} = \ldots = a_{3,k-3} = a_{2,k-1} + a_{3,k-2} = 0$

. . . .

$t = h$, $d = h+1$, $h+2$, » $a_{h,h} = a_{h,h+1} = a_{h-1,h+2} = 0$

Ponendo infine:

$$t = h + 1,\ d = h + 1,\ \text{si trova: } a_{h,h+1} = 0\,.$$

Da tutte queste uguaglianze si trae tosto, cominciando dall' ultima:

$$a_{h,h+1} = a_{h-1,h+2} = \dots = a_{2,k-1} = a_{1,k} = 0$$

Di più si ha dalle formule precedenti:

$$a_{1,1} = \dots = a_{1,k-1} = 0$$

quindi:

$$a_{1,1} = a_{1,2} = \dots = a_{1,k-1} = a_{1,k} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Ora ricordiamo che per i teoremi precedenti i termini di Q che dipendono da z_1 non possono che dipendere dalle variabili corrispondenti alla radice $\rho = 1$. Sia p. es. eventualmente z_{k+1} un' altra variabile corrispondente a questa radice; per un teorema precedente sarà:

$$z'_{k+1} = z_{k+1} \, .$$

Confrontando nella Q e nella trasformata i coefficienti di $z_2 z_{k+1}$ si trova tosto $a_{1,k+1} = 0$.

Ripetendo questo ragionamento per ogni altra variabile eventualmente corrispondente alla radice $+1$, e ricordando la (1) si trova che Q non dipende da z_1; Q quindi sarebbe degenere contro il supposto.

Abbiamo intanto dimostrato che k è dispari. Sia $k = 2h + 1$.

Analogamente a quanto abbiamo fatto testè troviamo successivamente:

$$a_{11} = a_{12} = \dots = a_{1,k-1} = 0$$

$$a_{22} = a_{23} = \dots = a_{2,k-2} = a_{1k} + a_{2,k-1} = 0$$

$$a_{33} = \dots = a_{3,k-3} = a_{2,k-1} + a_{3,k-2}$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$a_{hh} = a_{h,h+1} = a_{h-1,h+3} + a_{h,h+2} = 0$$

$$a_{h,h+2} + a_{h+1,h+1} = 0 \, .$$

Di più si trova, con metodo perfettamente analogo al precedente che oltre ai termini dipendenti solo da $z_1 .... z_k$ nessun altro termine può contenere una di queste variabili eccetto che quei termini che (a meno di un fattore costante) sono il prodotto di z_k per un' altra delle variabili eventualmente corrispondenti alla radice $+ 1$.

Indicando queste variabili eventuali con z_{k+1}, z_{k+2} ..... avremo perciò

$$Q = z_{2h+1} \left[2a_{1,k} z_1 + ... + 2a_{k-1,k} z_{k-1} + a_{kk} z_k + a_{k,k+1} z_{k+1} + ... \right]$$
$$+ z_{2h} \left[- 2a_{1,2h+1} z_2 + 2a_{3,2h} z_3 + ... + 2a_{2h,2h-1} z_{2h-1} + a_{2h,2h} z_{2h} \right]$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+ z_{h+2} \left[\pm 2a_{1,2h+1} z_h + 2a_{h+2,h+1} z_{h+1} + a_{h+2,h+2} z_{h+2} \right]$$
$$+ z_{h+1} \left[\mp 2a_{1,2h+1} z_{h+1} \right]$$
$$+ Q_1 (z_{h+1} \ldots) + Q_2$$

dove Q_1 è una forma quadrica dipendente soltanto dalle altre eventuali variabili z_{k+1} ..... corrispondenti alla radice $+ 1$, Q_2 dipende invece dalle variabili corrispondenti alle altre eventuali radici differenti da $+ 1$.

Non può essere $a_{1k} = 0$ perchè altrimenti Q non dipenderebbe da z_1, e sarebbe perciò degenere. Possiamo quindi prendere come nuove coordinate al posto di z_1, z_2,...., z_h rispettivamente le:

$$y_1 = 2a_{1k} z_1 + \ldots . + 2a_{k-1,k} z_{k-1} + a_{kk} z_k + a_{k,k+1} z_{k+1} + \ldots .$$
$$y_2 = - 2a_{1k} z_2 + \ldots + 2a_{3,2h} z_3 + \ldots + 2a_{2h,2h-1} z_{2h-1} + a_{2h,2h} z_{2h}$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$y_h = \pm 2a_{1,2h+1} z_h + 2a_{h+2,h+1} z_{h+1} + a_{h+2,h+2} z_{h+2} .$$

Ed avremo perciò:

$$Q = z_{2h+1} y_1 + z_{2h} y_2 + \ldots + z_{h+2} y_h + a z'^{\,}_{h+1} + Q_1 + Q_2$$

dove a è una costante $(\mp 2a_{1,k})$, $z_{h+1} \dots z_k$; $y_1 \dots y_h$ sono coordinate *reali*, Q_1, Q_2 sono forme quadriche reali che non dipendono dalle $y_1 \dots y_h$ $z_{h+1} \dots z_k$.

Ora $h>0$ per ipotesi; sia se è possibile $h>1$ ossia $2h+1>h+2$ allora ricordando che ogni termine

$$z_i \, y_{k-i+1} \qquad (i = k, \dots\dots, h+2)$$

si può scrivere

$$\frac{1}{4}\,(z_i + y_{k-i+1})^2 - \frac{1}{4}\,(z_i - y_{k-i+1})^2$$

vediamo che la Q conterrebbe, quando fosse ridotta a somme o differenze di quadrati, almeno *due* quadrati di segno opposto a quello degli altri e non sarebbe perciò riducibile, per la nota legge d' inerzia delle forme quadriche al tipo

$$k\,(z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2 - z_n^2) \qquad (k = \text{costante}).$$

È dunque perciò $h = 1$, ossia $k = 3$ c. d. d.

Osserviamo ora che quanto si è detto per una eventuale radice $\rho = +1$, vale anche per la radice $\rho = -1$. Infatti se noi mutiamo tutti i coefficienti della nostra proiettività, essa resta sempre una proiettività che trasforma in sè la forma quadrica Q.

Ricordiamo che le radici complesse dell' equazione caratteristica sono generali ed hanno per modulo l' unità. Consideriamo una coppia di radici immaginarie coniugate; come sappiamo a ciascuna di esse corrisponderanno cicli a un solo termine; siano $x_1 \dots x_k$ le variabili dei cicli corrispondenti alla prima; e siano $y_1\, y_2 \dots y_k$ le immaginarie coniugate corrispondenti alla seconda. Poichè le due radici non sono chiaramente radici quadrate di $+1$ potremo scrivere

$$Q = Q_1 + Q_2$$

dove Q_2 è una forma quadrica indipendente dalle $x_1 \ldots x_k, y_1 \ldots y_k$ mentre Q_1 è una forma quadrica del tipo

$$Q_1 = \sum_1^k a_{ij} x_i y_j .$$

Tanto Q_1 che Q_2 sono necessariamente reali; perciò a_{ii} sono reali, le a_{il} sono immaginarie coniugate delle a_{li} $(i, l = 1, 2, \ldots, k)$. Io dico che si può suppore $a_{11} \neq 0$. Infatti non tutte le a_{11}, $a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1k}$ possono essere nulle, perchè altrimenti Q_1 e quindi anche Q sarebbero degeneri. Cosicchè se $a_{11} = 0$ si può supporre che p. es. $a_{12} \neq 0$ e quindi anche che $a_{21} \neq 0$. Le quantità immaginarie coniugate a_{12}, a_{21} non siano puramente immaginarie; facciamo un cambiamento di variabili ponendo

$$x_1' = x_1 \quad x_2' = x_2 - x_1 \quad x_3' = x_3 \ldots x_k' = x_k$$

$$y_1' = y_1 \quad y_2' = y_2 - y_1 \quad y_3' = y_3 \ldots y_k' = y_k$$

e sopprimendo quindi gli indici, ciò che è evidentemente lecito; allora nella forma quadrica Q, così trasformata il coefficiente di $x_1 y_1$ non è più nullo. Se poi a_{12}, a_{21} fossero puramente immaginarie si ponga

$$x_1' = x_1 \quad x_2' = x_2 + i\, x_1 \quad x_3' = x_3 \ldots x_k' = x_k$$

$$y_1' = y_1 \quad y_2' = y_2 - i\, y_1 \quad y_3' = y_3 \ldots y_k' = y_k,$$

sopprimendo poi gli indici, (col che sempre x_i, y_i restano immaginarie coniugate); nella forma Q_1 così trasformata è $a_{11} \neq 0$. Supponiamo dunque $a_{11} \neq 0$.

Potremo allora scrivere

$$Q_1 = a_{11} \left(x_1 + \left(\frac{a_{21} x_2 + \ldots + a_{k1} x_k}{a_{11}}\right)\right) \left(y_1 + \frac{a_{12} y_2 + \ldots + a_{1k} y_k}{a_{11}}\right)$$

$$- \frac{(a_{21} x_2 + \ldots + a_{k1} x_k)(a_{12} y_2 + \ldots + a_{1k} y_k)}{a_{11}}$$

$$+ \sum_{i,j=2}^k a_{ij} x_i y_j$$

Con un cangiamento di coordinate potremo prendere come nuove coordinate (evidentemente ancora immaginarie coniugale) x_1, y_1 le espressioni

$$x_1 + \frac{a_{21} x_2 + \dots + a_{k1} x_k}{a_{11}}, \quad y_1 + \frac{a_{12} y_2 + \dots + a_{1k} y_k}{a_{11}}$$

col che, mutando leggermente le notazioni, avremo:

$$Q_1 = a_{11} x_1 y_1 + \sum_{i,j=2}^{k} a_{ij} x_i y_j$$

Ripetendo per la forma $\sum_{i,j=2}^{k} a_{ij} x_i y_j$ i ragionamenti testè usati per Q_1 e così continuando troviamo che possiamo scrivere:

$$Q_1 = a_{11} x_1 y_1 + a_{22} x_2 y_2 + \dots + a_{kk} x_k y_k$$

dove le x_i sono immaginarie coniugate alle y_i e le a_{ii} sono reali. Scriviamo perciò $x_i = z_i + i\, w_i$, $y_i = z_i - i\, w_i$ e avremo

$$Q_1 = \sum_i a_{ii} (z_i^2 + w_i^2)$$

Poichè in Q e quindi anche in Q_1 non più di un quadrato può avere segno opposto agli altri (quando le dette forme siano ridotti a somme o differenze di quadrati) saranno le a_{ii} (se $i > 1$) tutte di uno stesso segno, ossia Q_1 sarà una forma definita.

Esista ora una coppia di radici reali reciproche, differenti da ± 1. E siano p. es. $x_1\, y_1$ le variabili *reali* loro corrispondenti; sarà $Q = a_{11} x_1 y_1 + Q_2$, dove Q_2 non dipende da x_1, y_1. Posto $x_1 = z_1 + w_1$, $y_1 = z_1 - w_1$ abbiamo

$$Q = a_{11} (z_1^2 - w_1^2) + Q_2$$

Scriviamo ora la forma Q sotto la forma di somma di più forme parziali, una delle quali dipenda dalle variabili corrispondenti alle radici complesse dell' equazione caratteristica (se ve

ne sono), un' altra dalle variabili corrispondenti alla eventuale coppia di radici reali reciproche distinte da ± 1, un' altra dalle variabili corrispondenti alla eventuale radice $+1$, un'altra dalle variabili corrispondenti alla eventuale radice -1.

Sia Q indefinita del tipo iperbolico ossia del tipo $a\,(z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2 - z_n^2)$ ($a =$ cost.); allora di tutte queste forme parziali essendo la prima (se esiste) definita, e le ultime due certamente indefinite, come abbiamo visto, se la radice corrispondente $+1$ (oppure -1) non è generale, e la seconda essendo sempre indefinita abbiamo:

L' equazione caratteristica ammette sempre almeno una radice reale.

Dei seguenti tre casi due non possono avvenire contemporaneamente:

α) *Che esista una radice* $+1$ *non generale*

β) *Che esista una radice* -1 *non generale*

γ) *Che esista una coppia di radici reali reciproche distinte da* ± 1.

Studiamo ancora un momento il caso che la radice $+1$ sia singolare: analoghi ragionamenti si potrebbero fare per la radice -1. Sia

$$z_1^1 = z_1 + z_2 \quad z_2^1 = z_2 + z_3 \quad z_3^1 = z_3$$

il ciclo a tre termini corrispondente. Si verifica tosto che la forma quadrica Q sarà del tipo (a meno di un fattore costante)

$$Q = x_2^2 - x_3\,(2x_1 + x_2) + x_3 \sum_1^n a_{3i}\,x_i + \sum_4^n a_{ik}\,x_i\,x_k\,.$$

donde si verifica che il piano $z_3 = 0$ è il piano tangente alla quadrica nel punto $x_2 = x_3 = x_4 = \ldots = 0$ (lasciato fisso da P).

Ricordando i teoremi precedenti, abbiamo dunque soltanto possibili le seguenti categorie di proiettività reali che possano lasciar fissa una delle nostre quadriche:

A) Le radici dell' equazione caratteristiche distinte da

± 1 sono $2K$ radici complesse ($K > 0$) a due a due immaginarie coniugate, di modulo uno, tutte generali. Le radici uguali a ± 1 sono generali. A queste trasformazioni noi daremo il nome di proiettività K ellittiche ($n > 2K > 0$).

B) Non vi è alcuna radice distinta da ± 1; vi è un solo ciclo a più di un termine, e perciò a tre termini, corrispondente a una delle radici ± 1. Una tale trasformazione si dirà *parabolica*.

C) Oltre a delle eventuali radici generali uguali a ± 1 (esistenti certamente se $n > 2$) esiste soltanto una coppia di radici reali semplici generali reciproche distinte da ± 1. Una tale trasformazione si dirà *iperbolica*.

D) Tutte le proiettività di altro tipo si diranno lossodromiche; esse si possono suddividere in due categorie:

I^0) Esistono $2K$ radici complesse ($K > 1$) (di modulo 1, generali, a due a due immaginarie coniugate), una coppia di radici reali semplici generali reciproche (distinte da ± 1) ed eventualmente ancora delle radici uguali a ± 1 tutte generali. A una tale trasformazione daremo il nome di Kellittico-iperbolica.

II^0) Esistono ancora $2K$ radici complesse ($K > 1$) (di modulo 1, generali); le radici reali sono tutte uguali a ± 1; a una delle radici ± 1 corrisponde un ciclo a tre termini (oltre eventualmente agli altri cicli a un solo termine). A una tale trasformazione daremo il nome di K-ellittico-parabolica. È questo l' unico caso, che non si possa già incontrare per $n = 3$ o per $n = 4$.

Noi ora ci chiediamo: Quali di queste trasformazioni possono esistere in un gruppo discontinuo di proiettività trasformanti in sè la quadrica? Poichè in un gruppo insieme a una trasformazione esistono anche le sue potenze e queste formano già di per sè un gruppo, è a tal fine necessario e sufficiente che nessuna potenza della data trasformazione sia infinitesima. Ciò avviene evidentemente per le trasformazioni non ellittiche.

Esaminiamo perciò soltanto le trasformazioni S K ellittiche ($K > 0$).

Siano $e^{\pm i\theta_s^{(m)}}$ ($s = 1, 2, \dots k$) le radici immaginarie dell'equazione caratteristica della m^{esima} potenza S^m di S. Noi supporremo come è evidentemente lecito che $\theta_s^{(m)}$ siano tutti positivi e minori di 2π. Io dico che tutti gli angoli $\theta_s^{(1)}$ sono ragionali con 2π; infatti se ciò non fosse, sostituendo alla S una sua conveniente potenza, li potremmo supporre tutti irrazionali con 2π.

Prendiamo in tal caso un numero intero l grande ad arbitrio; si potrà sempre trovare un numero m tale che $\theta_1^{(m)}$ sia minore di $\frac{2\pi}{l^2}$. Se tutti gli angoli $\theta_2^{(m)}, \theta_3^{(m)} \dots, \theta_k^{(m)}$ sono minori di $\frac{2\pi}{l}$, allora S^m è chiaramente infinitesima e il gruppo non sarebbe più discontinuo, contro il supposto.

Potremo dunque supporre che almeno uno di questi angoli, p. es. $\theta_2^{(m)}$ sia maggiore di $\frac{2\pi}{l}$. Poniamo $\Sigma = S^m$, tra le trasformazioni $\Sigma, \Sigma^2, \dots \Sigma^l$ ne esisteranno chiaramente almeno due, poniamo $\Sigma^\alpha, \Sigma^\beta$ ($\alpha \neq \beta$) i cui angoli corrispondenti $\theta_2^{(m\alpha)}$ $\theta_2^{(m\beta)}$ differiscono per meno di $\frac{2\pi}{l}$, mentre naturalmente essendo $\theta_1^{(m)} < \frac{2\pi}{l^2}$, è $\theta_1^{(m\alpha)} < \frac{2\pi}{l}$, $\theta_2^{(m\alpha)} < \frac{2\pi}{l}$. Perciò a $\Sigma^{\beta-\alpha}$ corrisponderanno due angoli $\theta_1^{m(\beta-\alpha)}$, $\theta_2^{m(\beta-\alpha)}$ minori entrambi di $\frac{2\pi}{l}$. Si è così dimostrato che esiste una potenza di G^d per cui due degli angoli corrispondenti a θ_1 θ_2 sono piccoli a piacere. Ripetendo lo stesso ragionamento si troverebbe successivamente che esistono potenze di S per cui tre, quattro ecc. degli angoli θ sono piccoli a piacere e infine che esistono potenze di S per cui tutti gli angoli sono piccoli a piacere ossia che sono trasformazioni infinitesime. Perciò le uniche trasformazioni, che non possono figurare in un gruppo discontinuo sono le proiettività ellittiche aperiodiche. Questo teorema dimostra il teorema aritmetico che dati più numeri irrazionali esistono loro equimultipli differenti da numeri interi per quantità contemporaneamente infinitesime.

Come nel caso di forme quadriche a quattro variabili si potrebbe dimostrare il teorema del resto evidente che in un

gruppo discontinuo non possono esistere trasformazioni ellittico-iperboliche, di cui sia infinitesima la parte iperbolica (ossia che le due radici reali distinte siano infinitamente poco differenti dall' unità).

Da tutto questo si deduce che dato un gruppo discontinuo nessuna trasformazione S del gruppo può portare un punto A in un punto A' infinitamente vicino, eccettuato il caso che S sia ellittica e A sia un punto vicino infinitamente allo spazio assiale di S, ossia a quello spazio lineare lasciato fisso da S, le cui equazioni si ottengono uguagliando a zero le variabili corrispondenti alle radici complesse dell'equazione caratteristica di S.

Se dunque un gruppo discontinuo non fosse propriamente discontinuo p. es. nella regione R interna alla quadrica $Q=0$, vorrebbe dire che nell' intorno di ogni punto di R passerebbero spazii assiali di trasformazioni ellittiche del gruppo. In una regione R' di R a distanza finita dalla quadrica $Q=0$, questi spazii formerebbero un insieme ovunque condensato.

Siccome il numero delle dimensioni di uno di questi spazii non può presentare che un numero finito di casi (dovendo essere minore di $n-1$) esisterebbe almeno un pezzo R'' di R', in cui gli spazii assiali a k dimensioni (dove k è un numero minore di $n-1$) delle trasformazioni $\frac{n-1-k}{2}$ ellittiche del nostro gruppo formano un insieme ovunque condensato.

Per noti teoremi della teoria degli insiemi esisteranno perciò due di tali S_k vicini a piacere; siano u, v le trasformazioni ellittiche corrispondenti; $v^{-1}uv$ e u sarebbero trasformazioni ellittiche distinte con gli spazii assiali infinitamente vicini e con le stesse radici dell' equazione caratteristica, quindi $v^{-1}uvu^{-1}$ sarebbe infinitesima. Dunque:

Un gruppo di proiettività reali trasformante Q in se stesso, se è discontinuo, è propriamente discontinuo.

Le stesse dimostrazioni usate finora ci dimostrano che se Q è una forma definita, non esistono che proiettività ellittiche e che affinchè una di esse sia contenuta in un gruppo discon-

tinuo è necessario e sufficiente che sia periodica, ossia che le radici della corrispondente equazione caratteristica siano del tipo $e^{\pm ik\pi}$, dove k è un numero razionale.

E del resto in modo perfettamente analogo si potrebbero studiare le forme quadriche qualunque di cui fosse data la differenza tra il numero dei quadrati positivi e negativi, quando esse fossero ridotte a forma normale. Noi non entreremo però in queste discussioni.

Immaginiamo ora la quadrica $Q = 0$ presa come assoluto di una metrica non euclidea iperbolica od ellittica. Prendiamo un punto generico A, che non giaccia cioè su nessuno degli spazii assiali di un movimento ellittico e consideriamo i punti a lui equivalenti per un dato gruppo discontinuo (e quindi propriamente discontinuo). Consideriamo attorno ad A quella minima regione *poliedrica* (limitata da iperpiani) le cui faccie sono piani equidistanti da A e da uno dei punti equivalenti. Un tal poliedro che noi diremo *normale* gode (come già è ben noto nel caso di $n = 4$) della proprietà che ogni punto dello spazio è equivalente a un punto del poliedro stesso e che ogni punto del poliedro non è equivalente a nessun altro punto del poliedro stesso, fatta eccezione dei punti posti sulle faccie che sono in generale a due a due equivalenti. Le trasformazioni che portano una faccia nella faccia equivalente si possono assumere a trasformazioni generatrici del gruppo. In una parola, detto poliedro è un campo fondamentale per il nostro gruppo e lo definisce completamente. Su questi poliedri si possono ripetere quasi tutte le considerazioni che si fanno nel caso $n = 4$. La generalizzazione è immediata. Noi ci accontenteremo di esporre sommariamente qualche punto fondamentale più difficile, specialmente importante per la formazione effettiva nei singoli casi dei nostri poliedri.

Il caso che la metrica sia ellittica conduce al problema dei gruppi discontinui finiti, che noi ora trascuriamo come più semplice.

Studiamo dunque il caso che la metrica sia iperbolica e precisamente esaminiamo il comportamento del gruppo sulla quadrica $Q=0$. Ciò ha uno speciale interesse, perchè se noi immaginiamo rappresentato conformemente il nostro spazio su un semispazio euclideo, la $Q=0$ viene rappresentata sull' iperpiano limite e il nostro gruppo diventa su un tale iperpiano un gruppo conforme: lo studio nostro coincide con lo studio dei gruppi conformi. Si può dimostrare quasi come per $n=4$ che:

Il gruppo è impropriamente discontinuo o su tutta la varietà $Q=0$ *a «* $n-2$ *» dimensioni oppure soltanto su varietà V subordinate a non più che «* $n-3$ *» dimensioni. Nel secondo caso queste varietà V dividono la quadrica Q in una, o in due, o in infinite porzioni su cui il gruppo è propriamente discontinuo. Questo secondo caso, che è l' unico che dia origine a gruppi conformi propriamente discontinui è caratterizzato dal fatto che un poliedro generatore del gruppo o ha qualche faccia su* $Q=0$ *o ha qualche porzione esterna alla quadrica* $Q=0$.

La rappresentazione del nostro spazio su un semispazio euclideo è però utile anche nel caso che sull' iperpiano limite (su $Q=0$) il gruppo operi in modo impropriamente discontinuo per una migliore visione delle proprietà del gruppo; in tal caso ancora il campo fondamentale si può limitare con sfere e piani normali al piano limite. E, quando è possibile, è utile anche qui l' ampliamento del gruppo aggiungendo al gruppo una inversione per raggi vettori reciproci.

Veniamo ora alle applicazioni aritmetiche. Sia $Q=0$ una forma del tipo iperbolico a coefficienti intieri.

Si cerchino tutte le proiettività a coefficienti interi che la trasformano in se. Esse formano evidentemente un gruppo non contenente alcuna trasformazione infinitesima e perciò certamente propriamente discontinuo per i nostri teoremi. Si potrà per esso costruire un poliedro fondamentale corrispondente o col metodo testè svolto oppure col metodo cui ora noi accenneremo. Consideriamo cioè oltre alle proiettività di prima specie trasformanti

in sè la Q anche quelle di seconda specie e in particolare (con linguaggio geometrico) anche le omologie armoniche (a coefficienti intieri) (lascianti perciò fisso un piano e il suo polo rispetto $Q=0$) trasformanti in sè la Q. Tutte queste omologie o genereranno tutto il gruppo (così ampliato) aritmetico riproduttore di Q oppure un suo sottogruppo Γ.

Cerchiamo ora un poliedro limitato da iperpiani fissi per qualcuna di queste omologie e non intersecato da nessun altro di tali iperpiani. Esso sarà un poliedro generatore di Γ; spezzando tale poliedro opportunamente in parti si risale quindi a un poliedro fondamentale per il gruppo dato. Indichiamo ora lo svolgimento effettivo dei calcoli. Sia dunque $Q = \Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k$ dove le a_{ik} sono intieri e sia $\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k < 0$ la condizione affinchè un punto sia interno. Troviamo quelli dei nostri iperpiani intersecanti la $Q=0$. Sia $\Sigma\, b_i\, x_i = 0$, uno di questi iperpiani; e siano A_{ik} i complementi algebrici di a_{ik} in $|a_{ik}|$. Poniamo $\Delta = |a_{ik}|$; saranno così $x_k = \sum_i b_i\, A_{ik}$ le coordinate del polo P del nostro iperpiano π.

Intersecando questo la $Q=0$ sarà P esterno a $Q=0$ ossia

$$\sum_{i,k,l,m} a_{ik}\, A_{kl}\, b_l\, A_{im}\, b_m = \Delta \,\Sigma\, A_{ik}\, b_i\, b_k > 0.$$

Poichè $Q<0$ caratterizza i punti interni è $\Delta<0$ e perciò

$$\sum_{i,k} A_{ik}\, b_i\, b_k < 0.$$

Consideriamo ora l'omologia armonica definita da P, π. Sia (y_i) un punto qualunque A, $A' \equiv (y'_i)$ il corrispondente, $B \equiv (z_i)$ il punto in cui AP incontra π. Avremo:

$$y_i = \lambda\, x_i + z_i \qquad y'_i = y_i - 2\lambda\, x_i \tag{1}$$

dove λ è definito dalla

$$\Sigma\, b_i\, z_i = \Sigma\, b_i\, y_i - \lambda\, \Sigma\, b_i\, x_i = 0.$$

Ricordando i valori di x_i si trova così

$$\lambda = \frac{\Sigma\, b_i\, y_i}{\sum_{i,k} b_i\, b_k\, A_{ik}}$$

e per le (1) si ha

$$(2) \qquad y'_i = y_i - \frac{2\, \Sigma\, b_i\, y_i}{\Sigma\, A_{ik}\, b_i\, b_k} \sum_k A_{ik}\, b_k$$

Dovendo la proiettività (2) essere a coefficienti interi razionali, saranno razionali i rapporti delle b_i e potremo perciò supporre che le b_i siano numeri interi razionali, primi tra di loro. Di più $\dfrac{2\, \sum_k A_{tk}\, b_k}{\Sigma\, A_{ik}\, b_i\, b_k}\, b_i$ dovrà essere un numero intero, qualunque siano gli indici i, t.

Ma ora, essendo le b_i prime tra di loro, nessun fattore primo di $\Sigma\, A_{ik}\, b_i\, b_k$ può dividere tutte le b_i; perciò $\Sigma\, A_{\rho k}\, b_\rho\, b_k$ dovrà dividere tutti i numeri $2\, \Sigma\, A_{ik}\, b_k$ qualunque sia i e perciò anche $2\, \Sigma\, a_{il} \sum_k A_{ik}\, b_k = 2\Delta\, b_l$. Poichè le b_l sono interi primi tra di loro, $\Sigma\, A_{ik}\, b_i\, b_k$ sarà perciò un divisore (come sappiamo *negativo*) del numero (pure negativo) $2\, \Delta$.

Siano δ_α ($\alpha = 1, 2, \ldots p$) i divisori negativi di $2\, \Delta$. Avremo perciò per ognuno di essi il sistema di equazione:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{ik} A_{ik}\, b_i\, b_k = \delta_\alpha \\ &2 \sum_k A_{ik}\, b_k \equiv 0 \pmod{\delta_\alpha} \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

di cui si devono trovare le soluzioni $(b_1, \ldots b_n)$ intere prime tra di loro. Per ogni valore di α e per ogni tale soluzione abbiamo un piano di riflessione. Noi abbiamo perciò ricondotto una parte (che è spesso la fondamentale) della nostra ricerca alla risoluzione delle equazioni (A); la nostra teoria ci dà però un ausilio potentissimo per tale risoluzione. Infatti notiamo che per

ogni soluzione del sistema (A) è individuata una riflessione di Γ. Date due tali riflessioni U, V se ne può trovare una terza $V^{-1}\, U\, V$ e quindi infinite altre; anzi basta trovare le riflessioni R corrispondenti alle faccie di un poliedro fondamentale di Γ per potere trovare tutto il gruppo Γ che è da esso individuato e quindi tutte le altre soluzioni di (A). La teoria di (A) resta così simile alla teoria dell' equazione di Pell, per cui dalla soluzione minima si passa a tutte le altre soluzioni. La teoria aritmetica e la teoria dei gruppi si prestano così un vicendevole appoggio.

Ora è ben chiaro che date due forme quadratiche del tipo iperbolico, il problema di riconoscerne l' equivalenza e di trovare in caso affermativo tutte le trasformazioni che portano l' una nell' altra è risoluto bentosto, appena si sappia per ciascuna determinato il poliedro fondamentale del gruppo aritmetico riproduttore. Infatti costruito *in modo analogo* per ambedue un poliedro fondamentale, le due forme saranno equivalenti (o almeno una sarà equivalente a una forma simile all' altra) allora e allora soltanto che esisterà una proiettività P a coefficienti intieri che porta l' un nell' altro i due poliedri fondamentali e le corrispondenti trasformazioni generatrici del gruppo; l' esistenza di una tale proiettività si può riconoscere (quando ci fosse) con mezzi assolutamente elementari.

Se essa esiste, il prodotto di essa per le trasformazioni del gruppo riproduttore di una delle forme (che è subito noto appena dato il corrispondente poliedro) ci dà tutte le trasformazioni che portano una forma nell' altra.

I nostri metodi ci hanno così portato a un mezzo generale per studiare l' equivalenza delle nostre forme aritmetiche: e qui si schiuderebbe un ampio campo a ricerche particolari. Noi vogliamo dare un esempio di trattazione, costruendo il poliedro fondamentale del gruppo Γ relativo alla forma:

$$Q = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4\, x$$

o per usare le precedenti notazioni alla forma

$$Q = 2\ (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4\ x_5).$$

Le espressioni 2Δ, $\Sigma\ A_{ik}\ b_i\ b_k$, $2\Sigma_k\ A_{ik}\ b_k$ sono nel nostro caso rispettivamente -16, $-4\,b_1^2 - 4\,b_2^2 - 4\,b_3^2 + 16\,b_4\ b_5$, $-8\,b_1$, $-8\,b_2$, $-8\,b_3$, $16\,b_4$, $16 b_5$; le (A) diventano:

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 4b_4\ b_5 = \delta \qquad (\delta = 1, 2, 4)$$

$$2b_1 \equiv 2b_2 \equiv 2b_3 \equiv 4b_4 \equiv 4b_5 \equiv 0 \pmod{\delta}$$

ossia

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 4\,b_4\ b_5 = 1$$

oppure

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 4\,b_4\ b_5 = 2 \qquad (A')$$

oppure

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 4\,b_4\ b_5 = 4 \qquad [\,b_1 \equiv b_2 \equiv b_3 \equiv 0 \pmod 2\,]$$

Ora in questi e in simili casi è sempre assai comodo, come dicemmo ricorrere all' immagine su un semispazio euclideo. Noi otterremo, si può dire, nel caso attuale l'*analogo del gruppo modulare nello spazio a 4 dimensioni.*

Poniamo

$$z_1 = -\frac{x_1}{x_4};\ z_2 = -\frac{x_2}{x_4};\ z_3 = -\frac{x_3}{x_4};\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = \frac{x_5}{x_4} \qquad (\alpha$$

donde

$$z_4 = \left|\frac{\sqrt{x_5\,x_4 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}}{x_4}\right|.$$

Otteniamo così, immaginando z_1, z_2, z_3, z_4 come coordinate cartesiane ortogonali rappresentato l'interno di $Q = 0$ sopra il

semispazio $z_4 > 0$. Il piano $\Sigma\, b_i\, x_i = 0$ ha per immagine la sfera

$$b_4 + b_5\,(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2) = b_1\, z_1 + b_2\, z_2 + b_3\, z_3 \qquad (\beta)$$

che si riduce a un piano se $b_5 = 0$.

Io dico che il poliedro definito dalle

$$\left.\begin{array}{c} z_4 \geq 0 \quad z_1 < \frac{1}{2} \quad z_2 \leq \frac{1}{2} \quad z_3 \leq \frac{1}{2} \quad z_1 - z_3 \geq 0 \quad z_2 - z_3 \geq 0 \\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 \geq 1 \end{array}\right\} \qquad (\gamma)$$

da cui anche discende $z_1 \geq 0$, $z_3 \geq 0$ è un poliedro fondamentale per Γ. Dimostrato questo, allora poichè nessun punto di $z_4 = 0$ è un punto interno di detto poliedro, troveremo che il nostro gruppo opera sul piano $z_4 = 0$ in modo impropriamente discontinuo; troveremo così un *gruppo conforme impropriamente discontinuo dello spazio euclideo* $z_4 = 0$ *a tre dimensioni; ciò che ci dimostra un'altra volta come la teoria di tali gruppi sia inclusa nelle nostre teorie generali.*

Per vedere il nostro asserto, dobbiamo dimostrare che nessuna sfera (β) penetra nell'interno del nostro poliedro. Ciò è evidente per i piani (β) ossia per quelle ipersuperficie (β) per cui è $b_5 = 0$. Se $b_5 \neq 0$ noi lo potremo evidentemente supporre positivo; se b_4 fosse negativo allora per le (A') si trova tosto che (β) si riduce alla $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = 1$, che è una faccia del nostro poliedro; è dunque $b_4 \geq 0$. Ora per le (γ) affinchè una tale sfera penetri nel poliedro deve essere

$$\frac{1}{2}\left\{ |b_1| + |b_2| + |b_3| \right\} > |b_5| + |b_4|$$

donde

$$\left\{ |b_1| + |b_2| + |b_3| \right\}^2 > 4\,|b_5|^2 + 4\,|b_4|^2 + 8\,|b_5|\,|b_4| \geq 16\,|b_4|\,|b_5|$$

Indicando con δ uno dei numeri 1, 2, 4 si trova perciò dalle (A'):

$$\{ |b_1| + |b_2| + |b_3| \}^2 > 4 (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - \delta)$$

ossia

$$2 \{ |b_1 b_2| + |b_2 b_3| + |b_3 b_1| \} > 3 (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 4 \delta$$

Ora

$$b_1^2 + b_2^2 \geq 2 |b_1 b_2| ; \; b_2^2 + b_3^2 \geq 2 |b_2 b_3| ; \; b_1^2 + b_3^2 \geq 2 |b_1 b_3|$$

donde

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \geq |b_1 b_2| + |b_2 b_3| + |b_3 b_1|$$

e quindi

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 < 4 \delta \qquad (\delta)$$

È ben facile passare in rassegna le soluzioni del sistema (A') soddisfacenti alla (δ) corrispondente; si vede così facilmente che nessuna delle sfere (γ) corrispondenti penetra entro il nostro poliedro c. d. d.

Trovato così con tanta semplicità il voluto poliedro, è immediata la risoluzione del sistema (A') coi metodi su esposti; e noi senza difficoltà, data un' altra forma, potremmo risolvere per essa e per la forma data i problemi fondamentali della teoria dell' equivalenza.

Passiamo ora alla teoria dei sistemi di forme quadratiche; e prima di vedere bene i problemi aritmetici relativi, premettiamo alcune facili considerazioni geometriche, che ci permetteranno di esaurire rapidamente la nostra teoria.

Noi abbiamo già visto quale potente ausilio sia la metrica definita da una quadrica considerata come assoluto nella teoria

di una forma quadratica; noi vogliamo ora considerare altre metriche, che ci saranno pure di grande importanza.

Sia un spazio S_ν a $\nu = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ dimensioni, dove $n_1, n_2, \ldots, n_m$ sono m numeri ($m \geq 2$) interi non minori di 2. E ne siano $x_1^{(i)}\, x_2^{(i)} \ldots x_n^{(i)}$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) le coordinate di un punto generico. Consideriamo ora m spazii $G_{n_1}^{(1)} \ldots G_{n_m}^{(m)}$ a $n_1, n_2, \ldots n_m$ dimensioni; e siano $x_1^{(i)} \ldots x_{n_i}^{(i)}$ le coordinate in $S_{n_i}^{(i)}$. A ogni punto di S corrisponderà un punto in ciascuno degli spazii $S^{(i)}$; e viceversa, preso un punto in ciascuno degli spazii $S^{(i)}$, ne risulterà definito un punto di S_ν. In ciascuna degli spazii $S^{(i)}$ (che diremo spazii parziali) definiamo una metrica euclidea oppure ellittica (di Riemann) oppure iperbolica (di Lobacevskij) in modo però che non in più che uno di essi viga una metrica euclidea. Avrà così un significato ben preciso la parola: « distanza di due punti » in uno di questi spazii parziali. Siano ora A, B due punti di S e siano $A^{(i)}$, $B^{(i)}$ i corrispondenti in $S^{(i)}$, di cui indicheremo con $A^{(i)}\, B^{(i)}$ la distanza. Noi per definizione assumeremo come distanza $A\, B$ dei punti A, B la quantità definita da:

$$\overline{AB}^2 = \sum_{i=1}^{m} (A^{(i)}\, B^{(i)})^2$$

Chiameremo movimenti dello spazio S quelle trasformazioni biunivoche di S in sè stesso, che conservano le distanze di due punti quale si vogliano. È ben chiaro che data una trasformazione di ciascun $S^{(i)}$ in sè stesso ne viene definita una trasformazione di S in sè. È pure chiaro che se noi in ciascun $S^{(i)}$ prendiamo una trasformazione biunivoca che sia per lo $S^{(i)}$ corrispondente un puro movimento, ne sarà definito in S un movimento; il teorema reciproco non è però vero; perchè se p. es. due degli $S^{(i)}$ p. es. $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ sono a un ugual numero di dimensioni (ossia $n_1 = n_2$) e vige in essi una stessa metrica lo scambiare le $x_i^{(1)}$ con le $x_i^{(2)}$ corrisponde a un movimento in (S). Però noi possiamo dimostrare il seguente teorema: Se noi in S con-

sideriamo soltanto quei movimenti che formano un gruppo continuo generabile da trasformazioni infinitesime, allora essi si possono tutti generare mediante trasformazioni di ciascun $S^{(i)}$ in sè stesso, che per lo $S^{(i)}$ corrispondente sono puri movimenti.

Questo teorema che rientra per così dire nella teoria differenziale dei nostri spazii sarà da noi dimostrato più tardi; e noi ce ne serviremo per definire come movimenti di S soltanto appunto quelli che si possono generare come abbiamo testè detto.

Così pure dimostreremo più tardi che il nostro spazio S ammette per elemento lineare una forma differenziale quadratica, che le geodetiche di S hanno per corrispondenti su $S^{(i)}$ appunto le geodetiche di $S^{(i)}$ ecc.

Per proseguire più spicci, noi lascieremo ora queste proprietà secondarie e, basandoci sul significato più ristretto dato da noi alla parola « movimenti » dimostreremo che anche per i nostri spazii vale il teorema:

Un gruppo G discontinuo di movimenti (ossia senza trasformazioni infinitesime) è propriamente discontinuo ossia ammette un campo fondamentale.

Infatti ogni movimento M di G è per l'ipotesi fatta prodotto di m movimenti, $M^{(1)}, M^{(2)}, \ldots, M^{(m)}$ in ciascuno degli $S^{(1)}, S^{(2)} \ldots S^{(m)}$ parziali. Se G non fosse propriamente discontinuo, ogni punto A di S sarebbe infinitamente vicino a coppie di punti equivalenti. Un tal punto A determina m punti $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots A^{(m)}$ negli m spazii parziali. Se nell'intorno di A esistono punti equivalenti ciò per i teoremi già svolti significa che un certo numero dei punti $A^{(i)}$, p. es. $A^{(1)} A^{(2)}, \ldots, A^{(k)}$ sono infinitamente vicini agli spazii assiali $s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots, s^{(k)}$ di k movimenti ellittici $M^{(1)}, M^{(2)}, \ldots, M^{(k)}$ nei singoli spazii parziali corrispondenti a uno stesso movimento M di G, mentre i residui movimenti $M^{(k+1)}, \ldots M^{(m)}$ corrispondenti a M sono infinitesimi. Di più è $k > 0$, perchè nessun movimento M di G è infinitesimo. E per l'ipotesi fatta per ogni punto A di S si deve presentare uno di questi casi. Osserviamo però che i casi distinti possibili sono in

numero finito. Infatti essendo $0 < k \leq m$, il numero k può avere un numero finito di valori; i k spazii $S^{(1)}, S^{(2)}, \ldots, S^{(k)}$ essendo da scegliersi tra gli m spazii $S^{(1)}, \ldots\ldots, S^{(m)}$ non possono scegliersi che tra $\binom{m}{k}$ combinazioni; di più anche le dimensioni di $s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots, s^{(k)}$ essendo minori di $n_1, n_2, \ldots, n_k$ non possono presentare che un numero finito di casi. Potremo perciò spezzare S in una o più regioni R per ciascuna delle quali vale la seguente proprietà. Ogni punto A di essa è tale che un certo numero *ben determinato* k dei suoi punti corrispondenti $A^{(1)} \ldots A^{(k)}$ $(k > 0)$ posti in k *determinati* spazii parziali $S^{(1)}, S^{(2)} \ldots, S^{(k)}$ sono infinitamente vicini agli spazii assiali $s^{(1)}, s^{(2)} \ldots, s^{(k)}$ (di *determinate* dimensioni) di movimenti ellittici $M^{(1)} \ldots M^{(k)}$ corrispondenti a uno stesso movimento M di G, mentre $M^{(k+1)}, \ldots, M^{(m)}$ sono infinitesimi.

Alla regione R corrispondono in $S^{(1)} \ldots S^{(k)}$ delle regioni $R^{(1)} \ldots R^{(k)}$ in cui gli spazii $s^{(1)} \ldots s^{(k)}$ formano un insieme ovunque condensato. Un ragionamento già usato precedentemente dimostra allora l'esistenza in G di trasformazioni infinitesime, contro l'ipotesi fatta.

Noi possiamo quindi in S_r ancora parlare di campi fondamentali e possiamo con viste puramente geometriche dare dei mezzi generali per costruirli. Noi non parleremo qui dell'ampliamento per riflessione, che facilmente si potrebbe estendere: daremo invece un cenno dei poliedri normali, ciò che ci darà un'idea delle superficie con cui in ogni caso possiamo limitare il campo fondamentale. Consideriamo di nuovo un punto A e tutti i punti equivalenti A'. Sia A generico, ossia non venga p. es. lasciato fisso da nessun movimento M di G. Consideriamo attorno ad A la minima regione R limitata da superficie equidistanti da A e da uno dei punti A'. Essa di nuovo si potrà chiamare un poliedro normale e ogni punto di S_r ha in R un punto equivalente. Qual'è la natura delle superficie limitanti la R? Una di esse è caratterizzata dalla proprietà di essere equidistante da due punti A, A'.

Supponiamo p. es. che tutti gli spazii $S^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ siano a curvatura costante positiva (negli altri casi si userebbero procedimenti analoghi) e in ciascuno di essi usiamo coordinate di Weiertrass $x_1^{(i)}\, x_2^{(i)} \ldots x_{n_i}^{(i)}\, x_{n_i+1}^{(i)}$ legate dalla $x_1^{(i)2} + \ldots + x_{n_i+1}^{(i)2} = 1$. Se con $y^{(i)}$ e $z^{(i)}$ indichiamo le coordinate dei punti corrispondenti A, A' avremo come equazione della nostra superficie la

$$\sum_{i=1}^{m} \left[\arccos\left(x_1^{(i)}\, y_1^{(i)} + \ldots + x_{n_i+1}^{(i)}\, y_{n_i+1}^{(i)}\right)\right]^2 = \sum_{i=1}^{m} \left[\arccos\left(x_1^{(i)}\, y_1^{(i)} + \ldots + x_{n_i+1}^{(i)}\, y_{n_i+1}^{(i)}\right)\right]^2$$

Questo risultato è importante quando effettivamente si voglia costruire il poliedro fondamentale di un dato gruppo e fa vedere l' importanza dell' introduzione delle nostre metriche.

Passiamo alle applicazioni aritmetiche dei nostri gruppi.

Sia data p. es. una forma quadratica del solito tipo Q a coefficienti interi di un qualsiasi campo algebrico reale (insieme ai coniugati), su certe variabili $x_1^{(1)}\, x_2^{(1)} \ldots x_n^{(1)}$. Se noi consideriamo tutte le trasformazioni lineari T_1 a coefficienti interi dello stesso campo che trasformano Q_1 in sè, tra esse ve ne potranno chiaramente essere delle infinitesime. Consideriamo allora insieme a Q_1 tutte le forme coniugate Q_2, $Q_3 \ldots$ su nuove variabili $x_i^{(2)}$, $x_i^{(3)} \ldots$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ e insieme a ogni trasformazione T_1 le coniugate T_2, $T_3 \ldots$ che trasformeranno in sè le forme Q_2, $Q_3 \ldots$ È ben chiaro per note proprietà dei campi algebrici che non è possibile che T_1, T_2, $T_3 \ldots$ siano contemporaneamente infinitesime.

Ossia, detta T la trasformazione prodotto delle corrispondenti trasformazioni T_1, $T_2, \ldots$ nessuna trasformazione T sarà infinitesima (*). Da questo esempio, che non è altro che l'esempio, fondamentale della teoria dei gruppi riproduttori una forma quadratica a coefficienti interi in un campo algebrico generale

(*) Cfr. Blumenthal Mathem. Annalen (1903) dove si trova un particolare esempio di trasformazioni analoghe alle T, da un punto di vista però completamente diverso.

già si vede come in una teoria delle forme quadratiche in campi algebrici generali si può presentare il caso che il gruppo riproduttore di una forma quadratica Q_1 non sia discontinuo, mentre invece se noi consideriamo contemporaneamente i gruppi G_i riproduttori di più forme quadratiche Q_1 Q_2..... Q_m e ne combiniamo in un modo opportuno le trasformazioni S_i, può darsi che si ottenga un gruppo G discontinuo. Se noi ora osserviamo che ogni trasformazione S_i lascia fissa la forma quadrica Q_i, potremo concluderne, se le forme Q_i considerate sono tutte ellittiche o iperboliche, che ogni trasformazione S_i si può considerare come un movimento di uno spazio riemanniano o iperbolico e che quindi il gruppo G è uno dei gruppi considerati nelle ultime pagine. E si ha così il teorema:

Il gruppo discontinuo G è propriamente discontinuo: per esso si potrà quindi costruire un poliedro normale limitato da superficie del tipo della pag. 33.

È questo il risultato fondamentale delle nostre ricerche geometriche: di accertare cioè l' esistenza dei nostri poliedri normali, di indicare la natura delle loro faccie e di dare il mezzo per costruirli.

E anche qui la costruzione dei nostri poliedri ci dà il mezzo più diretto per risolvere per i nostri sistemi i problemi fondamentali dell' equivalenza.

Se noi ci riferiamo p. es. all'esempio testè citato delle forme coniugate Q_1, Q_2....., Q_m e se vogliamo riconoscere se esso è equivalente a un altro sistema analogo di forme coniugate P_1, P_2..... P_m o in altre parole se esiste una trasformazione a coefficienti intieri nel solito campo che porti Q_1 in P_1 (mentre le trasformazioni coniugate portano Q_2 in P_2, Q_3 in P_3 ecc.) basterà costruire *in modo analogo* i poliedri fondamentali dei gruppi H, K riproduttori dei due sistemi e vedere se esiste una trasformazione T del tipo voluto che li porti l'uno nell'altro, e che nello stesso tempo trasformi le sostituzioni generatrici di H determinate dal corrispondente poliedro nelle sostituzioni genera-

trici di K determinate pure dal poliedro corrispondente. Tutte le altre trasformazioni che portano le Q_i nelle P_i si otterranno moltiplicando T per le operazioni del gruppo K.

Tralasciando altre facili considerazioni sui gruppi fin qui studiati, enuncierò ancora soltanto che i nostri gruppi hanno importanti applicazioni funzionali; a queste specialmente interessanti per la teoria delle funzioni automorfe a più variabili, dedicherò una prossima nota.

Osservazione. — Dimostrerò sommariamente i teoremi enunciati senza dimostrazione nelle precedenti pagine del presente lavoro a proposito della teoria differenziale dei nostri spazi S_ν.

Una linea l di S_ν è definita dando le linee l_1, l_2,...., l_m corrispondenti sui varii spazii parziali. Sia data una linea qualsiasi congiungente due punti A, B; e siano ds_1, ds_2,...., ds_m gli elementi di archi delle linee corrispondenti sugli spazii parziali.

La lunghezza della linea data sarà per definizione

$$\int_B^A \sqrt{ds_1^2 + ds_2^2 + \dots + ds_m^2}\,.$$

Essa sarà evidentemente minima se le linee l_1, l_2,...., l_m sono geodetiche. Perciò una geodetica generale del nostro spazio S_ν ha per corrispondenti delle geodetiche sugli spazii parziali. E di più la distanza di due punti A, B da noi definita coincide evidentemente con la distanza dell' arco geodetico che li congiunge. Ciò che si potrebbe anche verificare facilmente studiando l' elemento lineare ds^2 dei nostri spazii. Se le $x^{(i)}$ sono coordinate Riemanniane nel corrispondente spazio $S^{(i)}$, si ha nel caso che nessuno degli spazii parziali sia euclideo e si prescinda da differenza tra reale e immaginario (ossia si suppongano p. es. tutti gli spazii a curvatura negativa)

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{dx_1^{(i)^2} + dx_2^{(i)^2} + \dots + dx_{n_i}^{(i)^2}}{x_1^{(i)^2}} \tag{1}$$

e nel caso che $S^{(1)}$ sia euclideo

$$ds^2 = \sum_{i=2}^{m} \frac{dx_1^{(i)^2} + \ldots + dx_{n_i}^{(i)^2}}{x_1^{(i)^2}} + dx_1^{(1)^2} + \ldots + dx_{n_1}^{(1)} \tag{1}$$

Sia ora

$$U = \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{n_i} \xi_t^{(i)} \frac{\partial}{\partial x_t^{(i)}}$$

un movimento infinitesimo del nostro spazio, o, se si vuole la $x_t'^{(i)} = x_t^{(i)} + \varepsilon\xi_t^{(i)}$ ($\varepsilon =$ una costante infinitesima) trasformi in sè la forma (1) o (1)'. Studiamo dapprima il caso (1) e poniamo per semplicità $m = 2$; per non complicare gli apici poniamo:

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \ldots + dx_{n_1}^2}{x_1^2} + \frac{dy_1^2 + \ldots + dy_{n_2}^2}{y_1^2} \tag{1}$$

dove le x sono le coordinate in $S^{(1)}$, le y in $S^{(2)}$. I movimenti in $S^{(1)}$ sono le trasformazioni del gruppo di Lie generato dalle:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\,;\; x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i}\,;\; \sum_{\nu=1}^{n_1} x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}\,;\; 2x_1 x_i \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2^2 + \ldots + x_n^2 - x_1^2) \frac{\partial}{\partial x_i} -$$

$$- 2 \sum_{j=2}^{n_1}{}' x_i x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (i, j = 2, \ldots n_1;\; i \neq j)$$

dove Σ' indica che si deve escludere il valore $j = i$.

Indichiamo queste trasformazioni con $X_1 X_2 \ldots X_{r_1}$ $\left(r_1 = \frac{n_1(n_1+1)}{2}\right)$ e le analoghe per $S^{(2)}$ con $S_1, S_2, \ldots, S_{r_2}$ $\left(r_2 = \frac{n_2(n_2+1)}{2}\right)$. Il più generale movimento U richiesto sarà evidentemente del tipo

$$U = \Sigma\, \psi_i X_i + \Sigma\, \varphi_i S_i$$

dove le ψ sono funzioni delle y, le φ delle x. Basta ora scrivere le note formule di Killing, per trovare che le ψ, φ sono co-

stanti. A risultato analogo si giunge nel caso $(1)'$ ed è così dimostrato il nostro asserto.

Ecco p. es. come si può condurre il calcolo.

Nel caso (1) si cominci ad annullare il coefficiente di dx_1 dy_1 in $U(ds^2)$.

Si trova facilmente:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial y_1} = \frac{1}{y_1}(a_{i1} + a_{i2}\, y_2 + \ldots + a_{in_2}\, y_{n_2}) \qquad (i = 1, 2, \ldots n_1)$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1}(b_{i1} + b_{i2}\, x_2 + \ldots + b_{in_1}\, x_{n_1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots . n_2)$$

dove le a, b sone costanti legate dalle

$$a_{11} + b_{11} = a_{12} + 2b_{21} = a_{13} + 2b_{31} = \ldots . = a_{1n_2} + 2b_{n_2 1} = 0$$

$$b_{12} + 2a_{21} = \ldots . = b_{1n_1} + 2a_{n_1 1} = 0$$

$$b_{ki} + a_{ik} = 0 \quad [i = 2, 3, \ldots . n_1 ; k = 2. 3, \ldots . n_2]$$

Si ponga poi uguale a zero il coefficiente di $dx_1\, dy_k$ ($k=2$, $3; \ldots . n_2$) e di $dy_1\, dx_k$ ($k = 2, 3, \ldots . n_1$) in $U(ds^2)$. Si trova così che tutte le a, le b sono nulle, che nessuna delle φ dipende da x_1 e nessuna delle ψ dalle y_1. Annullando quindi i coefficienti di $dx_i\, dy_k$ ($i = 2, \ldots n_1$) ($k = 2, \ldots n_2$) in $U(ds^2)$ e tenendo conto dei risultati ottenuti si ha infine che tanto le φ come le ψ sono costanti effettive.

In modo perfettamente analogo (e anzi più semplice perchè in $(1)'$ le variabili $x_1^{(1)} \ldots . . x_{n_1}^{(1)}$ hanno un ufficio simmetrico) si compirebbe il calcolo nel caso $(1)'$.

È ora una cosa assai notevole, che i teoremi precedenti svolti nel caso di forme quadratiche continuano per alcuni lati a valere anche per forme Hermitiane: in queste ultime pagine accennerò brevemente alle teorie relative. Già il Picard (Acta Mathematica tomo I°) studia il gruppo *aritmetico* riproduttore

di una forma Hermitiana indefinita in tre variabili x, y, z; che indica con $\alpha\, x\, x_0 + \beta\, y\, y_0 - \gamma\, z\, z_0$ dove α, β, γ sono interi reali positivi e x_0, y_0, z_0 sono le variabili coniugate immaginarie delle x, y, z considera poi come esso opera sui rapporti $u = \frac{x}{z}$, $v = \frac{y}{z}$ e insieme a esso considera il gruppo immaginario coniugato operante sui rapporti $u_0 = \frac{x_0}{y_0}$, $v_0 = \frac{y_0}{z_0}$. Posto $\frac{x}{y} = x' + i\,x''$, $\frac{x}{z} = y' + i\,y''$, questi due gruppi definiscono un gruppo reale sulle quattro variabili reali x', x'', y', y'' trasformante in sè la ipersfera $x'^2 + x''^2 + y'^2 - y''^2 - 1 = 0$.

Ogni trasformazione del gruppo è del tipo

$$u' = \frac{M_1\, u + P_1\, v + R_1}{M_3\, u + P_3\, v + R_3} \qquad v' = \frac{M_2\, u + P_2\, v + R_2}{M_3\, u + P_3\, v + R_3}$$

Ora Picard dimostra che se M_1, P_1, R_1, M_2 ecc. sono della forma $a + i\,b$ (a, b *intieri* razionali) e se si ha

$$\begin{vmatrix} M_1 & P_1 & R_1 \\ M_2 & P_2 & R_2 \\ M_3 & P_3 & R_3 \end{vmatrix} = 1$$

allora il nostro gruppo è certamente propriamente discontinuo nelle variabili u, v. Questo teorema che serve a stabilire l' esistenza di gruppi discontinui definibili aritmeticamente non è che un particolarissimo caso di uno dei seguenti teoremi generalissimi, che può servire di base, come vedremo in un altro lavoro, anche a importanti teoremi funzionali.

Sia data una forma Hermitiana Q riducibile al tipo

$$x_1\, x_1^0 + x_2\, x_2^0 + \dots + x_{n-1}\, x_{n-1}^0 - x_n\, x_n^0 \qquad (A)$$

in n variabili x_i, di cui le x_i^0 sono le immaginarie coniugate.

Consideriamo un gruppo di trasformazioni del tipo:

$$x_i^1 = \sum_k a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \text{ dove } |a_{ik}| = \Delta = 1 \; (^*) \tag{1}$$

che trasformino in sè la detta forma. Allora costituiranno evidentemente un gruppo anche le trasformazioni

$$u_i' = \frac{a_{i1} u_1 + \ldots + a_{i,n-1} u_{n-1} + a_{in}}{a_{n1} u_1 + \ldots + a_{n,n-1} u_{n-1} + a_{nn}} \qquad (i = 1, 2 \ldots n-1) \tag{2}$$

sulle variabili $u_1 \ldots u_{n-1}$; *questo gruppo trasformerà in sè la iper-varietà (nel senso dato dal Prof. Segre a questo nome):*

$$\sum_1^{n-1} u_i u_i^0 - 1 = 0 \tag{3}$$

Io dimostrerò che se nessuna delle (2) *è infinitesima, allora le* (2) *genereranno un gruppo che è propriamente discontinuo nel campo delle variabili* u_i, u_i^0.

Osserviamo che la (1) è infinitesima soltanto se i mod $(a_{ii}-1)$, mod (a_{ik}) $(i \neq k)$ sono infinitesimi. Così pure queste uguaglianze si possono supporre soddisfatte anche se la (3) è infinitesima, essendo $\Delta = 1$. Aggiungiamo che noi sempre porremo (**)

$$u_i = u_i' + i u_i''; \quad u_i^0 = u_i' - i u_i''; \quad (i = 1, 2 \ldots\ldots n-1)$$

La (3) è perciò la ipersfera

$$u_1'^2 + u_1''^2 + u_2'^2 + v_2''^2 + \ldots - 1 = 0 \tag{4}$$

Noi indicheremo con S il primo membro di (4) e con S' ciò che esso diventa per una trasformazione (2). Siccome per

(*) Qui con $|a_{ik}|$ indichiamo il determinante delle a_{ik}.

(**) Ciò non può generare confusione, nonostante il differente significato dato a u'_i nella (2).

ipotesi $S' = 0$, $S = 0$ devono rappresentare una stessa ipervarietà, si verifica tosto che si ha

$$S' = \frac{S}{\bmod^2 (a_{n1} u_1 + a_{n2} u_2 + \ldots + a_{n,n-1} u_{n-1} + a_{nn})} \tag{5}$$

La (5) anzi non è che la traduzione in formule della nostra ipotesi.

Sviluppando la (5) troviamo (cfr. Picard loc. cit.), indicando con a^0_{ik} le quantità immaginarie coniugate di a_{ik}, che:

$$(i = 1, 2, \ldots n-1) \quad a_{i1} a^0_{i1} + a_{i2} a^0_{i2} + \ldots + a_{i,n-1} a^0_{i,n-1} - a_{in} a^0_{in} =$$

$$- (a_{n1} a^0_{n1} + \ldots + a_{n,n-1} a^0_{n,n-1} - a_{nn} a^0_{nn}) = 1 \tag{6}$$

$$a_{i1} a^0_{j1} + a_{i2} a^0_{j2} + \ldots + a_{i,n-1} a^0_{j,n-1} - a_{in} a^0_{jn} = 0 \quad (j \neq i : i, j = 1, 2, \ldots n) \tag{7}$$

equazioni analoghe a quelle tra i coefficienti di una sostituzione ortogonale e che sono equivalenti alle:

$$(i = 1, 2 \ldots n-1) \; a_{1i} a^0_{1i} + a_{2i} a^0_{2i} + \ldots + a_{n-1,i} a^0_{n-1,i} - a_{ni} a^0_{ni} =$$

$$- (a_{1n} a^0_{1n} + \ldots + a_{n-1,n} a^0_{n-1,n} - a_{nn} a^0_{nn}) = 1 \tag{8}$$

$$(i \neq j : i, j = 1, 2, \ldots n) \; a_{1i} a^0_{1j} + \ldots + a_{n-1,i} a^0_{n-1,j} - a_{ni} a^0_{nj} = 0 \tag{9}$$

Le (6), (7) oppure le (8), (9) equivalgono alla (5).

Noi dimostreremo ora due teoremi fondamentali, per la nostra teoria:

1. *Due punti* $(u'_i \, u''_i)$, $(\bar{u}'_i, \bar{u}''_i)$ *hanno un invariante simmetrico nei due punti rispetto a tutte le trasformazioni* (2) *soddisfacenti alla* (5) *o alle equazioni equivalenti.*

Consideriamo infatti le variabili complesse $u_i = u'_i + i\, u''_i$,

$\bar{u}_i = \bar{u}_i' + i\, u_i''$ corrispondenti ai nostri due punti e formiamo con esse l' espressione R simmetrica reale definita dalla :

$$R_{u\bar{u}} = \frac{\left(\sum_1^{n-1} u_i\, \bar{u}_1^0 - 1\right)\left(\sum_1^{n-1} u_i^0\, \bar{u}_i - 1\right)}{\left(\sum_1^{n-1} u_i\, u_i^0 - 1\right)\left(\sum_1^{n-1} \bar{u}_i\, \bar{u}_i^0 - 1\right)} - 1 \tag{10}$$

Io dico che essa è un invariante per una qualsiasi trasformazione (2). Consideriamo infatti i punti trasformati dei punti citati per una trasformazione (2) e siano v_i, $\bar{v}_i$ le variabili complesse corrispondenti. Per la (5) avremo

$$\sum_1^{n-1} v_i\, v_i^0 - 1 = \frac{\sum_1^{n-1} u_i\, u_i^0 - 1}{(a_{n1}\, u_1 + \ldots + a_{n,n-1}\, u_{n-1} + a_{nn})(a_{n1}^0\, u_1^0 + \ldots + a_{n,n-1}^0\, u_{n-1}^0 + a_{nn}^0)}$$

$$\sum_1^{n-1} \bar{v}_i\, \bar{v}_i^0 - 1 = \frac{\sum_1^{n-1} \bar{u}_i\, \bar{u}_i^0 - 1}{(\bar{a}_{n1}\, \bar{u}_1 + \ldots + \bar{a}_{n,n-1}\, \bar{u}_{n-1} + \bar{a}_{nn})(\bar{a}_{n1}^0\, \bar{u}_1^0 + \ldots + \bar{a}_{n,n-1}^0\, \bar{u}_{n-1}^0 + \bar{a}_{nn}^0)}$$

Così pure per le (6), (7), (8), (9) si ha identicamente, come facilmente si verifica

$$\sum_1^{n-1} v_i\, \bar{v}_1^0 - 1 = \frac{\sum_1^{n-1} u_i\, \bar{u}_i^0 - 1}{(a_{n1}\, u_1 + \ldots + a_{n,n-1}\, u_{n-1} + a_{nn})(\bar{a}_{n1}^0\, \bar{u}_1^0 + \ldots + \bar{a}_{n,n-1}^0\, \bar{u}_{n-1}^0 + \bar{a}_{nn}^0)}$$

$$\sum_1^{n-1} \bar{v}_i\, v_i^0 - 1 = \frac{\sum_1^{n-1} \bar{u}_i\, u_i^0 - 1}{(\bar{a}_{n1}\, \bar{u}_1 + \ldots + \bar{a}_{n,n-1}\, \bar{u}_{n-1} + \bar{a}_{nn})(a_{n1}^0\, u_1^0 + \ldots + a_{n,n-1}^0\, u_{n-1}^0 + a_{nn}^0)}$$

Queste equazioni dimostrano senz'altro appunto che l'espressione R_{uu} definita dalle (10) è un invariante del nostro gruppo.

La espressione $R_{u\bar{u}}$ *è reale;* infatti la $R_{u\bar{u}} + 1$ è una frazione il cui denominatore è il prodotto di due somme ciascun addendo delle quali è reale (perchè o è uguale a — 1 o è il prodotto di due quantità immaginarie coniugate) e il cui numera-

tore è pure reale, perchè prodotto di due quantità pure immaginarie coniugate.

Se la $R_{u\bar{u}}$ *è nulla, e i due punti* $u, \bar{u}$ *sono interni alla* (4), *essi coincidono.*

Essendo la $R_{u\bar{u}}$ invariante per ogni trasformazione (2) noi potremo usare di una delle (2) per portare il punto u_i nel punto origine (ossia nel centro della sfera (4). In altre parole potremo supporre che sia $u_i = 0$. La $R_{u\bar{u}}$ diventa allora:

$$\frac{1}{1 - \Sigma\left(\bar{u}_i'^2 + \bar{u}_i''^2\right)} - 1 \tag{10}$$

Questa espressione è nulla soltanto se

$$\Sigma\left(\bar{u}_i'^2 + \bar{u}_i''^2\right) = 0 \quad \text{ossia se } \bar{u}_i' = \bar{u}_i'' = 0 \quad \text{ossia se } \bar{u}_i = 0,$$

ossia se i due punti u, $\bar{u}$ coincidono. Quindi anche:

Se la $R_{u\bar{u}}$ *è infinitesima* (*) *i punti* $u, \bar{u}$ *sono infinitamente vicini.* Ciò può anzi servire come definizione di punti infinitamente vicini, quando si pensi al gruppo delle trasformazioni (2), ed è appunto in questo senso che noi useremo spesso questa locuzione.

Se dei punti $u, \bar{u}$ *uno giace sulla sfera* (4) *si ha che* $R_{u\bar{u}}$ *è infinitamente grande.*

Ciò è senz'altro chiaro per la (10).

La $R_{u\bar{u}}$ *è positiva se i due punti* $u, \bar{u}$ *sono distinti e interni alla* (4). Infatti per considerazioni già svolte si può supporre $u_i = 0$ col che $R_{u\bar{u}}$ si riduce alla (10)' che è maggiore di zero, perchè per l'ipotesi fatta è $0 < \Sigma\left(\bar{u}'^2 + \bar{u}''^2\right) < 1$.

Le proprietà finora enumerate giustificano il nome che noi ora daremo a $\sqrt{R_{u\bar{u}}}$: noi chiameremo $\sqrt{R_{u\bar{u}}}$ pseudodistanza dei

(*) Osserviamo che $R_{u\bar{u}}$ è indeterminata o infinita, se uno dei punti $u, \bar{u}$ giace sulla sfera (4); ciò che noi sempre escluderemo.

punti u, $\bar{u}$; e chiameremo pseudomovimenti le (2). Considereremo soltanto i punti interni alla (4); i punti della (4) saranno a pseudodistanza infinita.

Questa interpretazione geometrica sarà importantissima per le nostre ulteriori ricerche.

La (10) si può anche scrivere

$$K_{u\bar{u}} = \frac{\left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 & \dots\dots & u_{n-1} & i \\ \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \dots\dots & \bar{u}_{n-1} & i \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} \bar{u}_1^0 & \bar{u}_2^0 & \dots\dots & \bar{u}_{n-1}^0 & i \\ u_1^0 & u_2^0 & \dots\dots & u_{n-1}^0 & i \end{matrix} \right\|}{\left(\sum_1^{n-1} u_i u_i^0 - 1 \right) \left(\sum_1^{n-1} \bar{u}_i \bar{u}_i^0 - 1 \right)}$$

Se la forma Hermitiana invece di essere la (A) fosse

$$\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k^0 \qquad \text{dove} \qquad a_{ki} = a_{ik}^0 \tag{A'}$$

sarebbe

$$R_{u\bar{u}} = \frac{\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, \bar{x}_k^0\; \Sigma\, a_{ik}\, x_i^0\, x_k}{\Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k^0\; \Sigma\, a_k^i\, \bar{x}_i\, \bar{x}_k^0} - 1$$

dove $(x_1 \dots x_n)$ $(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n)$ sono i valori delle variabili complesse che compariscono nella forma Hermitiana e che si possono in un certo senso considerare come le coordinate *omogenee* dei due punti u, $\bar{u}$

Sarebbe ora da farsi la classificazione dei possibili tipi, cui può appartenere una delle nostre trasformazioni (1), (2). Notiamo che i principii svolti a proposito delle forme quadratiche possono servire anche al nostro scopo, perchè una forma Hermitiana si può considerare come forma quadratica appena le variabili coniugate x_i^0 o delle x_i si considerino come nuove variabili indipendenti.

Ma noi sopprimeremo i particolari di una tale discussione, volendoci restringere in questo lavoro ai punti fondamentali della ricerca; e noi ci faremo invece la domanda:

Quali delle trasformazioni (2) *possono portare un punto interno alla* (4) *(a pseudodistanza finita) in un punto infinitamente vicino?*

Nel rispondere a questa domanda, noi vedremo anche come si potrebbe procedere alla classificazione delle trasformazioni (2).

Per il nostro scopo osserveremo che intanto una trasformazione (2) infinitesima porta ogni punto in un punto infinitamente vicino, ciò che è ben chiaro: una tale trasformazione per le (6), (7) si vede che è caratterizzata dall'essere infinitesime le a_{ik} $(i \neq k)$ e dall' essere prossimamente uguali le a_{ii}; anzi poichè il determinante della trasformazione è 1 si può supporre che senz'altro, oltre le a_{ik} $(i \neq k)$ anche le $a_{ii} - 1$ sieno infinitesime. Prescindiamo ora da queste trasformazioni: supponiamo cioè che la (2) e quind' anche la (1) siano finite. Facciamo un cambiamento di variabili in modo di ridurre la proiettività (1) a forma canonica; come abbiamo già detto parlando delle forme quadriche, si deve a tal fine risolvere l' equazione caratteristica della proiettività: a ogni radice di questa equazione corrispondono una o più delle nuove variabili distribuite in cicli a uno o più termini. Chiamiamo z_i queste variabili; la proiettività immaginaria coniugata della (1) sarà ridotta pure a forma canonica, quando si assumano come variabili indipendenti le variabili z_i^0 immaginarie coniugate delle z_i.

La nostra forma Hermitiana, espressa con queste variabili, ci apparirà somma di parecchi termini, ciascuno dei quali è prodotto di una costante per una delle variabili z_i per una delle variabili z_i^0. È facile riconoscere coi procedimenti già usati che se nella forma Hermitiana in discorso comparisce un termine $b_{ik}\, z_i\, z_k^0$, la radice corrispondente a z_i deve essere reciproca della radice corrispondente a z_k^0: e poichè quest' ultima radice è immaginaria coniugata della radice corrispondente a z_k, sarà la radice corrispondente a z_i reciproca del numero immaginario coniugato della radice corrispondente a z_k. Notiamo ora che, poichè la forma Hermitiana, supposta naturalmente irriducibile,

deve contenere tutte le variabili, la radice corrispondente a una qualsiasi delle variabili z_i deve essere immaginaria coniugata del numero reciproco di una delle radici dell' equazione caratteristica corrispondente alla (1). Noi divideremo ora perciò le variabili z_i e le corrispondenti radici in tanti gruppi, mettendo in uno stesso gruppo le variabili che corrispondono a una stessa radice di modulo uguale a 1 (reciproca alla propria coniugata) oppure quelle che corrispondono a due radici, che abbiano lo stesso argomento e i moduli reciproci (tali cioè che ciascuna sia immaginaria coniugata dell'inversa dell'altra). Sia ν questi gruppi. La nostra forma Hermitiana, che chiameremo Q, sarà perciò del tipo:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_\nu$$

dove Q_i $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$ è una forma Hermitiana dipendente soltanto dalle variabili dell' i^{esimo} gruppo e dalle loro coniugate. Siccome la forma Q è riducibile al tipo (A) di queste forme $Q_1 \ldots Q_\nu$ (che diremo forme parziali) non più di una è indefinita; potremo perciò supporre se $\nu \geq 2$ che $Q_1 + \ldots Q_{\nu-1}$, siano definite; la Q_ν poi, se dipende da più che una variabile deve essere pure del tipo (A). Indicheremo ora con Q' la forma $Q_1 + \ldots + Q_{\nu-1}$ e con Q'' la forma Q_ν. Sarà

$$Q = Q' + Q''$$

dove Q' è una forma definita, mentre Q'' se dipende da più che una variabile è indefinita del tipo (A). Le forme Q', Q'' (a meno che $Q' = 0$) dipendono da variabili completamente distinte e la nostra proiettività nelle variabili z_i, z_i^0 (prodotto della (1) e della immaginaria coniugata) risulta perciò prodotto di una proiettività P' trasformante la Q' in sè per una proiettività P'' trasformante in sè la Q''. La Q' è, come sappiamo definita; perciò la P' è (quando venga espressa nelle variabili reali $z_i + z_i^0$, $\frac{z_i - z_i^0}{2}$)

una proiettività trasformante in sè una forma quadrica definita; e perciò, per quanto sappiamo, le radici della corrispondente equazione caratteristica sono tutte in modulo uguali all'unità e generali, ossia i cicli corrispondenti sono a un solo termine. Abbiamo perciò che le variabili z_i, da cui dipende la Q', corrispondono a radici generali e in modulo uguale all' unità.

Le variabili z_i da cui dipende la Q'' corrispondono per ipotesi o a una stessa radice, o a due radici di medesimo argomento e di moduli inversi. Queste osservazioni bastano senz'altro a una rapida classificazione delle (1) o delle (2); ma noi, come dicemmo, ci restringeremo a considerare quelle (2) che portano un punto reale interno a (4) in un punto infinitamente vicino. Notiamo ora che le z_i z_i^0 si possono considerare come coordinate omogenee di un punto interno a (4); dato uno di questi punti sono noti soltanto i rapporti delle z_i. Noi fisseremo i moduli delle z_i, in modo che esse siano tutti finiti e che nessuno sia infinitesimo. Poichè la nostra proiettività P trasforma la forma Q in sè stessa, anche i valori trasformati delle z_i per la P soddisferanno alla stessa condizione. Dato un punto entro (4) le z_i restano note a meno di un fattore del tipo $\rho e^{i\theta}$ ($\theta =$ quantità reale) uguale per tutte le z_i. Se noi vogliamo che la P porti un punto entro (4) in un punto infinitamente vicino (p. es. nel senso euclideo) dovranno le z_i trasformate differire pochissimo dalle z^i corrispondenti iniziali moltiplicate per uno stesso fattore. Immaginiamo ora p. es. che in P'' esistano uno o più cicli a più di un termine; e supponiamo inoltre che alle variabili z della Q'' corrisponda p. es. una sola radice ρ che, dovendo essere reciproca della immaginaria coniugata avrà per modulo l' unità. Allora, poichè, come abbiamo detto, un punto entro (4) resta lo stesso se noi moltiplichiamo i valori corrispondenti delle z per uno stesso fattore e le z^0 per il fattore coniugato, potremo senz'altro supporre che sia $\rho = 1$. Siano ora « $i + k$ » i cicli corrispondenti, di cui i a più di una variabile, mentre k sono a una variabile sola ($i > 0$, $k \geq 0$). Nel caso delle forme quadriche

le proiettività, in cui compariva un ciclo a più di un termine erano soltanto le ellitico-paraboliche: l'intuizione geometrica bastava per dirci che una tale proiettività non può portare un punto in un punto infinitamente vicino (nel senso euclideo) a meno che esso sia assai prossimo alla quadrica stessa ossia, nel senso non-euclideo a distanza infinita.

Noi vedremo qui ripetersi un fatto analogo, ma poichè la intuizione geometrica è nel nostro caso meno agevole, noi ricorreremo alla trattazione analitica.

Siano

$$y_1^{(1)}\, y_2^{(1)} \ldots y_{n_1}^{(1)};\; y_1^{(2)} \ldots y_{n_2}^{(2)};\; \ldots;\; y_1^{(i)} \ldots y_{n_i}^{(i)};\; y^{(i+1)} \ldots y^{(i+k)}$$

quelle delle nostre variabili che corrispondono alla radice $\rho = 1$ e compariscono in Q''; le $y_i^{(e)} \ldots y_n^{(e)}$ $(l = 1, \ldots, i)$ $(n_e > 1)$ sieno quelle dell' l^{esimo} ciclo a più di un termine. Indicheremo con « η » le variabili immaginarie coniugate.

La proiettività P'' sarà dunque

$$\overline{y}_1^{(l)} = y_1^{(l)} + y_2^{(l)};\; \overline{y}_2^{(l)} = y_2^{(l)} + y_3^{(l)};\; \ldots;\; \overline{y}_{n_l-1}^{(l)} = y_{n_l-1}^{(l)} + y_{n_l}^{(l)};\; \overline{y}_{n_l} = y_{n_l} \quad (l = 1, 2, \ldots i)$$

$$\overline{y}^{(i+m)} = y^{(i+m)} \qquad (m = 1, 2, \ldots k)$$

dove noi indichiamo con $\overline{y}$ i valori trasformati delle y. Se noi esprimiamo che questa proiettività insieme all' immaginaria coniugata sulle y trasforma in sè una forma Hermitiana Q'' si trova tosto che i termini di essa, i quali contengono la $y_1^{(e)}$ $(\eta_1^{(e)})$, $(e=1,2,\ldots,i)$ non possono ulteriormente contenere che una delle $\eta_{n_m}^{m}$ $(y_{n_m}^{m})$, $(m = 1,2,\ldots, i)$ e che i termini che dipendono dalla $y^{(i+m)}$ $(\eta^{(i+m)})$, $(m = 1,2,\ldots, k)$ non possono ulteriormente dipendere che dalle η^{i+m} (y^{i+m}) stesse o dalle $\eta_{n_e}^{(e)}$ $(y_{n_e}^{(e)})$, $(e = 1, 2,\ldots, i)$. Consideriamo ora quei termini T di Q'' che contengono una delle

$$\eta_{n_1}^{(1)}\, \eta_{n_2}^{(2)} \ldots\ldots \eta_{n_i}^{(i)}$$

Per quanto abbiamo visto tra essi compariranno tutti i termini T', che contengono una delle $y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, \ldots . y_1^{(i)}$. La somma dei citati termini T' si può scrivere, come è ben chiaro in uno o più modi sotto la forma

$$\eta_{n_1}^{(1)} A_1 + \eta_{n_2}^{(2)} A_2 + \ldots . + \eta_{n_i}^{(i)} A_i$$

dove le A_i sono lineari nelle « y » ; anzi, poichè la forma Hermitiana non è naturalmente riducibile a un numero minore di variabili, le $A_1, A_2, \ldots . A_i$ considerate come funzioni di $y_1^{(1)} \ldots . y_1^{(i)}$ sono indipendenti ; noi perciò pur senza mutare le variabili $y_k^{(e)}$ $(k = 2, \ldots, n_e ; l = 1, 2, \ldots i)$ e le variabili $y^{(i+m)}$ $(m = 1, 2, \ldots, k)$ potremo assumere le $A_1, A_2, \ldots, A_i$ come nuove coordinate (che chiameremo $x_1, x_2, \ldots, x_i$) al posto delle $y_1^{(1)} \ldots . y_1^{(i)}$; col che avremo:

$$Q'' = Q_1'' + Q_2''$$

dove Q_2'' è una forma Hermitiana, che non contiene le variabili $x_1, \ldots, x_i \; y_{n_1}^{(1)} \ldots y_{n_i}^{(i)}$ e le coniugate, mentre Q_1'' è una forma Hermitiana del tipo

$$\alpha_1 x_1 \eta_{n_1}^{(1)} + \ldots + \alpha_i x_i \eta_{n_i}^{(i)} + \alpha_1^{(0)} \xi_1 y_{n_1}^{(1)} + \ldots + \alpha_{n_i}^{(0)} \xi_i y_{n_i}^{(i)}$$

dove ξ_i, $\alpha_i^{(0)}$ sono immaginarie coniugate delle x_i, α_i. Questa forma Q_i'' è la somma di i forme parziali del tipo della $\alpha_1 x_1 \eta_{n_1}^{(1)} + \alpha_1^{(0)} \xi_1 y_{n_1}^{(1)}$; questa forma mutando $\alpha_1 x_1$ in x_1 e quindi $\alpha_1^0 \xi_1$ in ξ_1 diventa $x_1 \eta_{n_1}^{(1)} + \xi_1 y_{n_1}^{(1)}$; ponendo $x_1 = u + v$, $y_{n_1}^{(1)} = u - v$ e quindi $\xi_1 = u^0 + v^0$; $\eta_{n_1}^{(1)} = u^0 - v^0$, questa forma diventa :

$$(u + v)(u^0 - v^0) + (u^0 + v^0)(u - v) = 2(uu^0 - vv^0)$$

che è indefinita. Essendo per ipotesi la nostra forma di tipo ellittico o iperbolico, è perciò $i = 1$ (*) e Q_2'' è definita. Avremo perciò che

$$Q = (Q' + Q_2'') + Q_1''$$

(*) Ciò dà un altro risultato per la classificazione delle nostre proiettività : *Se le variabili di Q'' corrispondono a una stessa radice, non vi può essere tra i cicli da esse formate che al più un solo ciclo a più di un termine.*

dove le forme Q_1 Q''_2 e la loro somma sono definite, mentre Q'_1 è indefinita. Se noi supponiamo, ciò che possiamo ottenere mutando caso mai il segno di Q che $Q' + Q''_2$ sia una forma Hermitiana definita positiva, allora il valore di Q corrispondente a un punto interno o sul contorno della sfera (4) è rispettivamente negativo o nullo. Se ora noi supponiamo che un punto A viene portato in un punto infinitamente vicino (nel senso euclideo) dalla nostra proiettività allora, poichè tutte le y si suppongono finite, è evidente per la forma della proiettività in discorso che la $y^{(1)}_{(n_1)}$ sarà infinitesima.

Anche Q''_1 è perciò infinitesimo. Se dunque A è interno alla (4) allora, dovendo essere Q negativa ed essendo $Q' + Q''_2$ una forma definita positiva, sarà anche $Q' + Q''_2$ infinitesima e perciò tutte le variabili da cui essa dipende saranno pure infinitesime. Si deduce perciò che Q è infinitesimo e quindi A è nel senso euclideo infinitamente vicino al contorno della sfera (4) ed è perciò a pseudodistanza infinita. Se perciò esiste nella nostra proiettività un ciclo a più termini, essa non può portare un punto a pseudodistanza finita in un punto infinitamente vicino. Tutti i cicli sono perciò a un solo termine.

Analoga, se non ancora più semplice, è la discussione nel caso che le variabili di Q'' corrispondono a due radici di moduli inversi e dello stesso argomento: argomento, che moltiplicando tutti i coefficienti della nostra proiettività totale per uno stesso fattore si può senz'altro supporre uguale a 1.

E si trova così infine:

Se una delle nostre trasformazioni (finite) porta un punto A a pseudodistanza finita in un punto infinitamente vicino, allora o tutte le radici dell'equazione caratteristica sono in modulo uguali all'unità e le variabili corrispondenti formano cicli a un solo termine oppure oltre a eventuali radici cosiffatte esiste una coppia di radici che si possono supporre reali e reciproche infinitamente poco discoste da $+1$. Nel primo caso anzi A è evidentemente infinitamente vicino a uno spazio fisso della trasformazione.

Il primo caso è analogo alle proiettività ellittiche nel caso delle forme quadriche, il secondo a quello delle iperboliche o ellittico-iperboliche, la cui parte iperbolica sia infinitesima. In questo secondo caso si dimostra come nel caso delle forme quadriche che esiste una potenza della trasformazione in discorso che è infinitesima.

Dunque, se noi abbiamo un gruppo discontinuo di trasformazioni (2) (senza trasformazioni infinitesime) se esso fosse impropriamente discontinuo in una regione R a pseudodistanza finita, allora, poichè nessuna potenza di una trasformazione del gruppo può essere infinitesima, ogni punto di R sarà infinitamente vicino allo spazio fisso di una trasformazione, la cui equazione caratteristica ha radici in modulo uguale all'unità.

Come nel caso delle forme quadriche si dimostrerebbe l'esistenza di una trasformazione infinitesima nel gruppo, contro l'ipotesi.

Considerazioni ancora più semplici possono dimostrare lo stesso fatto nel caso delle forme Hermitiane definite.

Dunque: *Se un gruppo di trasformazioni* (2), *di cui nessuna è infinitesima, lascia fissa la sfera* (4) *esso è propriamente discontinuo entro la sfera (a pseudodistanza finita).*

Se la forma Hermitiana ha per coefficienti dei numeri interi di Gauss, e tali sono pure i coefficienti delle proiettività del nostro gruppo, questo gruppo, che allora coincide o col gruppo aritmetico riproduttore della forma o con un suo sottogruppo, non contiene evidentemente trasformazioni infinitesime ed è perciò propriamente discontinuo.

Il secondo è il teorema, che Picard dimostra per $n = 3$ in un modo piuttosto complicato e che, come si vede, non è che un caso particolarissimo del nostro teorema generale.

Il problema che ora noi vogliamo affrontare è la costruzione del campo fondamentale di uno dei nostri gruppi: costruzione, per cui Picard non dà, neppure per il suo caso particolare, nessun metodo generale. Per noi ora invece la cosa riesce abba-

stanza semplice: la pura generalizzazione di quanto abbiamo detto per le forme quadriche riesce anche nel nostro caso. Noi non daremo che brevi cenni del metodo generale, non volendo parlare delle circostanze secondarie, che facilmente il lettore può riconoscere. Per il nostro scopo è fondamentale il fatto da noi osservato che due punti entro la (4) hanno un invariante, nullo soltanto se i due punti coincidono: la loro pseudodistanza. Consideriamo un punto generico A e i suoi trasformati A', A''..... per le trasformazioni del gruppo.

Essi costituiscono chiaramente una figura invariante per il gruppo. Consideriamo le superficie luogo dei punti equipseudodistanti da due di questi punti: esse pure costituiranno una figura invariante per il gruppo. Formiamo la minima figura, che comprende nell'interno il punto A e sia limitata da ipersuperficie della specie su accennata ed eventualmente anche dalla (4).

Una tal figura è evidentemente tutta distinta dalle equivalenti e con locuzione già usata si potrebbe dire un poliedro normale del gruppo. Vedremo ben presto come si possa spesso anche qui usare di un ampliamento del gruppo con operazioni di seconda specie per costruire un campo fondamentale del gruppo stesso.

Molte altre delle considerazioni svolte nel caso delle forme quadriche si applicano al caso attuale. In particolare vale anche qui la osservazione fondamentale che il problema di riconoscere l'equivalenza di due forme Hermitiane del solito tipo rientra nel problema generale da noi trattato della costruzione dei campi fondamentali di uno dei nostri gruppi. Se infatti due forme Hermitiane sono aritmeticamente equivalenti, tali saranno pure i loro gruppi aritmetici riproduttori e i campi fondamentali, costruiti in modo analogo, di questi gruppi. E viceversa. Per riconoscere l'equivalenza di due tali forme, basta perciò risolvere il semplicissimo problema di vedere se sono trasformabili l'uno nell'altro per una trasformazione aritmetica T i campi fondamentali, costruiti in modo analogo, dei gruppi aritmetici ripro-

duttori. In caso affermativo il prodotto di T per il gruppo riproduttore di una delle forme dà tutte le trasformazioni che le portano l' una nell' altra ecc. ecc.

Per costruire però tali campi fondamentali in modo simmetrico può anche qui riuscire assai comodo, piuttosto che ricorrere ai poliedri normali, l' ampliare il gruppo (quando è possibile) con certe operazioni che sono analoghe alle riflessioni nel caso delle forme quadriche. Per veder bene che cosa sono queste operazioni osserviamo che la trasformazione $\overline{x}_1 = -x_1^0$ (e quindi $\overline{x}_1^0 = -x_1$) muta la nostra forma in sè stessa. A essa corrisponde la trasformazione: $\overline{u'}_1 = -u'_1$; $\overline{u}''_1 = u''_1$; $\overline{u}_i = u_i$; $\overline{u}''_i = u''_i$ $(i = 2,\ldots.)$ (*). Il prodotto di questa trasformazione per una qualsiasi trasformazione (2) sarà detta una trasformazione di seconda specie o un pseudomovimento di seconda specie. Quando poi un tale pseudomovimento di seconda specie lascia, come la trasformazione citata $\overline{u'}_1 = -u'_1$, $\overline{u}''_1 = u''_1$ ecc. fissi tutti i punti di una ipersuperficie (che in questo caso è la $u_1 = 0$) allora esso si dirà una pseudoriflessione. Per vedere la natura di queste pseudoriflessioni e delle corrispondenti ipersuperficie (di pseudoriflessione) noi noteremo che esse non sono altra cosa che le trasformate della

$$(\alpha) \qquad \overline{u}'_1 = -u'_1 \quad \overline{u}''_1 = u''_1 \quad \overline{u}^1_i = u^1_i \quad \overline{u}''_i = u'_i \qquad (i = r \ldots)$$

per un qualsiasi pseudomovimento (2) di prima specie. Ora la (α) lascia fissi i punti della $u'_1 = 0$, ipersuperficie questa che si può definire dicendo che è il luogo dei punti che hanno nulla la parte reale di u_1 ossia di $\frac{x_1}{x_n}$. Il trasformato di questo luogo per (2) è perciò quello, per cui è nulla la parte reale di $\left[\frac{a_{11}\,u_1 + a_{12}\,u_2 + \ldots + a_{1n}}{a_{n1}\,u_1 + a_{n2}\,u_2 + \ldots + a_{nn}}\right]$ dove naturalmente è $\sum_1^{n-1} a_{1i}\,a_{1i}^0 - a_{1n}\,a_{1n}^0 = 1$ $\sum_1^{n-1} a_{ni}\,a_{ni}^0 - a_{nn}\,a_{nn}^0 = -1$; $\sum_i a_{1i}\,a_{ni}^0 - a_{1n}\,a_{nn}^0 = 0$. Queste ipersuperficie nel nostro spazio rap-

(*) Noi qui indichiamo con una linetta sovrapposta le variabili trasformate.

presentativo sono delle quadriche. Se noi dunque possiamo ampliare il nostro gruppo in modo che il gruppo ampliato Γ contenga operazioni di seconda specie, noi potremo con superficie di questa natura limitare un poliedro, che sarà campo fondamentale o per Γ o per quel suo sottogruppo di indice minimo generabile con sole pseudoriflessioni.

Noi abbiamo così visto il fatto tanto notevole che con metodi analoghi si può portare la teoria delle nostre forme Hermitiane alla stessa perfezione della corrispondente teoria delle forme quadriche: ma noi diciamo di più che i metodi e gli artifici da noi usati possono anche servire per la teoria dei sistemi di forme Hermitiane, come hanno servito per la teoria dei sistemi di forme quadriche.

E anche qui useremo procedimenti perfettamente analoghi.

Siano date più forme Hermitiane Q_1 Q_2 .... Q_ν e siano $x_1^{(i)}$ $x_2^{(i)}$ .... $x_{n_l}^{(i)}$ $(i=1, 2 \dots \nu)$ le variabili corrispondenti. Se $Q_l = x_1^{(l)} \xi_1^{(l)} + \dots + x_{n_l-1}^{(l)} \xi_{n_l-1}^{(l)} \pm x_{n_l}^{(l)} \xi_{n_l}^{(l)}$ (essendo le ξ le variabili immaginarie coniugate delle x) porremo $\frac{x_t^{(l)}}{x_n^{(l)}} = u_t'^{(l)} + i u_t''^{(l)} = u_t^{(l)}$ $(l=1,2, \dots \nu)$ $(t=1, 2, \dots n_l - 1)$. Siano le forme Hermitiane o definite o indefinite del tipo precedente. Consideriamo un gruppo G di operazione T, ciascuna delle quali risulti dal prodotto di ν proiettività T_1, T_2,.... T_ν riproducenti rispettivamente la Q_1, la Q_2,.... la Q_ν. Indicheremo nello stesso modo queste trasformazioni scritte sotto forma non omogenea. Noi penseremo ora uno spazio S_k a $k = 2(n_1 - 1) + 2(n_2 - 1) + \dots + 2(n_\nu - 1)$ dimensioni, le coordinate di un punto del quale siano appunto le $u_t'^{(l)}$, $u_t''^{(l)}$ $(l = 1, 2, \dots \nu)$ $(t = 1, 2, \dots n_l)$. Ognuna delle nostre forme Hermitiane indefinite (p. es. la Q_l) definisce una ipersfera $[\sum_{t=1}^{n_l} \{[u_t'^{(l)}]^2 + [u_t''^{(l)}]^2\} - 1 = 0]$. Consideriamo ora lo spazio subordinato $G_{2(n_l-1)}$ a S_k in cui tutte le coordinate, fuorchè le $u'^{(l)}$ $u''^{(l)}$ sono nulle: noi lo chiameremo lo l^{esimo} spazio parziale. Un punto di S_k definisce un punto in ciascuno spazio parziale (la sua proiezione su di esso) e viceversa preso un punto in ciascuno spazio parziale, ne viene de-

finito un punto di S_k. Consideriamo ora nell' l^{esimo} $(l = 1, 2, \ldots \nu)$ spazio parziale la ipersfera corrispondente a Q_l e quindi quella regione R di S_k, tale che il punto dello spazio parziale l^{esimo} $(l=1, 2, \ldots, \nu)$ corrispondente a un suo punto qualunque giaccia entro la ipersfera succitata.

Come nel caso analogo dei sistemi di forme quadriche si può dimostrare il teorema:

Se il gruppo G *non contiene trasformazioni infinitesime ossia se le trasformazioni parziali* $T_1 \ldots . T_\nu$ *corrispondenti a una stessa trasformazione* T *di* G *non sono mai contemporaneamente infinitesime, allora il gruppo* G *è entro* R *propriamente discontinuo.*

È questo il teorema fondamentale della nostra teoria. E noi ora ci chiediamo: È possibile dare in modo conforme ai metodi precedenti un mezzo per costruire i poliedri normali di un gruppo discontinuo G del tipo considerato? È ben facile vedere che sì. Consideriamo due punti della regione R in S_k di coordinate $(u_t'^{(l)}, u_t'^{(l)})$ e $(\overline{u_t'^{(l)}}, \overline{u''^{(l)}})$.

A questi due punti corrisponderà in ciascuno spazio parziale $S_{2(n_l-1)}$ una coppia di punti $u^{(l)}\ \overline{u^{(l)}}$; le considerazioni precedenti ci danno per questa coppia di punti un invariante (per tutte le trasformazioni T_l) $\sqrt{R^{(l)}_{u\bar{u}}}$ (la loro pseudodistanza rispetto alla ipersfera Q_l) infinitesima solo se i punti $\overline{u^{(l)}}$, $u^{(l)}$ sono infinitamente vicini. Noi chiameremo pseudodistanza dei due punti iniziali in S_k la $\sqrt{\Sigma R^{(l)}_{u\bar{u}}}$: ciò che si giustifica osservando che essa è un invariante per ogni trasformazione T, che è nulla solo se i due punti sono infinitamente vicini e che essa è finita se i due punti sono discosti dal contorno di R. Posto questo si consideri un punto generico A di R e i suoi trasformati per G e si costruiscano le ipersuperficie luogo dei punti equipseudodistanti da due dei punti citati. Consideriamo la minima delle regioni interne a R, contenenti il punto A e limitate da tali ipersuperficie (ed eventualmente forse anche dal contorno di R): essa si può assumere come poliedro normale del nostro gruppo. La costruzione di tali poliedri serve nel modo già più volte ci-

tato a studiare i problemi dell'equivalenza di due sistemi di forme Hermitiane.

Noi ora dimostreremo che la presente teoria comprende come particolarissimo caso anche lo studio delle forme Hermitiane, i cui coefficienti siano interi algebrici in un campo algebrico qualsiasi. E premettiamo perciò la seguente osservazione. *Consideriamo un campo algebrico* Γ *reale insieme ai coniugati: costruiamo una proiettività* P *su* n *variabili a determinante* + 1 *e i cui coefficienti siano del tipo* a + i b, *dove* a, b *sono numeri interi algebrici appartenenti al suddetto campo.* (*) *Insieme alla proiettività* P *consideriamo le proiettività coniugate (i cui coefficienti sono rispettivamente i coniugati dei coefficienti analoghi di* P). *Io dico che tali proiettività non possono essere contemporaneamente infinitesime.*

Se noi ricordiamo infatti le condizioni affinchè una tale proiettività sia infinitesima, riconosciamo tosto la verità del nostro asserto, perchè non esiste nessun numero intero algebrico infinitesimo insieme ai numeri coniugati.

Consideriamo una forma Q_1 Hermitiana del solito tipo, i cui coefficienti sieno interi di Gauss (**) in un dato campo Γ_1 e consideriamo le forme coniugate espresse tutte in variabili distinte. Consideriamo una proiettività P_1 a determinante + 1, trasformante Q_1 in sè e tutte le proiettività coniugate. Come abbiamo visto l'operazione P che risulta dalla considerazione simultanea di tutte queste proiettività non può mai essere infinitesima. Il gruppo di siffatte operazioni P si dice essere il gruppo aritmetico riproduttore della forma Q_1 (e delle coniugate). A esso si possono applicare dunque tutte le precedenti considerazioni.

E la costruzione dei poliedri fondamentali può servire nel

(*) *A* numeri di questo tipo si darà da noi il nome di numeri interi di Gauss nel campo considerato.

(**) Cfr. nota precedente.

nostro caso per riconoscere se una forma Q_1 è equivalente a una altra forma Q_2, naturalmente nel senso che una proiettività a coefficienti interi di Gauss porti l'una nell'altra e in caso affermativo a trovare tutte le cosiffatte proiettività che portano l'una nell'altra; i metodi per risolvere tali questioni sono gli stessi, che noi abbiamo già svolti in casi analoghi.

Si potrebbe ora cercare di classificare tutti i nostri possibili gruppi e approfondire qualche caso particolare: cosa che si otterrebbe cercando di estendere alle forme Hermitiane quanto si fa per il caso delle forme quadriche.

Ciò, che non presenterebbe grandi difficoltà e di cui perciò non ci occuperemo.

È forse interessante invece fare alcune osservazioni, che mostrano il legame tra la nostra e altre teorie. La teoria delle forme quadriche è, come noi abbiamo già visto, collegata con la teoria degli spazii a curvatura costante; qualche cosa di analogo avviene per le forme Hermitiane.

Data una delle nostre forme Hermitiane ad $n+1$ variabili esistono, come abbiamo visto $\infty^{n(n+2)}$ proiettività a determinante $+1$ che la trasformano in sè, come è agevole riconoscere ricordando le (5) e seg. Queste formano evidentemente un gruppo continuo di Lie; noi abbiamo quindi considerato questo gruppo come operante in uno spazio S a $2n$ dimensioni, le cui coordinate sono la parte reale e il coefficiente della parte immaginaria dei rapporti di n delle variabili della forma alla $(n+1)^{\text{esima}}$. E in un tale spazio S due punti hanno, come abbiamo visto, un invariante R, simmetrico nelle loro coordinate, che, quando i due punti divengono infinitamente vicini, è infinitesimo del secondo ordine, ossia si riduce a una forma quadratica nei differenziali delle coordinate stesse. Si ha così a fare proprio con spazii S_{2n} che ammettono un gruppo continuo di movimenti a $n(n+2)$ parametri e la loro teoria è un caso particolare degli spazii che ammettono gruppi continui di movimenti: il nostro caso è specialmente notevole per la forma specialmente semplice

che assume anche la distanza di due punti non infinitamente vicini. E si ha così che *per questi spazii un gruppo discontinuo di movimenti è propriamente discontinuo.* (*)

È ben chiaro quanto interesse potrebbe presentare la teoria geometrica di tali spazii: è questo però un problema che esce dal campo algebrico per entrare piuttosto in quello della geometria differenziale; il loro legame con le forme Hermitiane agevola però molto un tale studio.

Anche la teoria dei sistemi di forme Hermitiane è strettamente legata alla teoria degli spazii che ammettono un gruppo continuo di movimenti; analogamente a quanto abbiamo visto nel caso dei sistemi di forme quadriche, tali spazii si possono definire dicendo che il loro elemento lineare è la somma degli elementi lineari (parziali) corrispondenti a ciascuna delle forme Hermitiane di cui è composto il sistema.

Le precedenti osservazioni aprono, come si vede, il campo a molte ricerche geometriche assai importanti per la nostra teoria e per la ricerca e costruzione effettiva di gruppi e di poliedri fondamentali. Di esse mi occuperò in un lavoro, che si sta ora pubblicando negli Atti dell' Istituto Veneto.

In un altro lavoro mi occuperò pure delle applicazioni funzionali delle presenti teorie: esso pure è in corso di stampa negli « Annali di Matematica ».

Qui mi accontenterò di ennunciare le proprietà e i teoremi più importanti contenuti negli scritti citati, tanto più che io spero che il lettore potrà ricostruirne senza gravi difficoltà le dimostrazioni per mezzo dei concetti fin qui svolti.

Nella prima nota dimostro anzitutto che, come le nostre metriche rispetto a forme del tipo $x_1 x_1^0 + \dots + x_{n-1} x_{n-1}^0 - x_n x_n^0$

(*) Nella mia Memoria: « Sugli spazii a 4 dimensioni ecc. » (Annali di Matematica 1903) io sono incorso in una dimenticanza, trascurando di ennumerare le metriche qui citate e le analoghe; ciò, perchè confondendo elementi reali con complessi non ho pensato che delle ipersuperficie *complesse* invarianti per un gruppo di movimenti anzichè geodeticamente parallele potevano in ogni punto essere tangenti al cono di linee di lunghezza nulla. Ricordando questo fatto, i risultati della Memoria citata si completano senz'altro.

portano a gruppi discontinui di trasformazioni proiettive sulle variabili $\frac{x_i}{x_n} = u_i + i\, v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ così si può dire:

Un gruppo finito di trasformazioni lineari omogenee complesse lascia sempre fissa una forma Hermitiana definita; (ciò che è già noto) *e viceversa un gruppo discontinuo di movimenti nelle metriche definite da una forma Hermitiana definita è finito.* Così anche il celebre problema dei gruppi finiti di proiettività è strettamente unito alle nostre metriche, così come la teoria dei gruppi finiti di proiettività reali è connessa con la teoria delle metriche Riemanniane, teoria che servì già al Goursat e al Baguera per scoprirne una intera classe.

Osservo poi come la metrica rispetto una forma $x_1 x_1^0 - x_2 x_2^0$ coincide con le metriche pseudosferiche; e ciò perchè i movimenti di tali metriche vengono, come sappiamo, dati da trasformazioni lineari sulla variabile $u_1 + i\, v_1 = \frac{x_1}{x_2}$.

Nel caso di $n = 2$ le nostre teorie includono così i gruppi fuchsiani e la teoria dei sistemi di forme Hermitiane a 2 variabili include perciò le teorie di Hilbert-Blumenthal, dei gruppi iperabeliani di Picard ecc. come casi particolarissimi.

Nel caso di $n \geq 3$ otteniamo delle metriche affatto nuove. La loro teoria si può svolgere, per semplicità, nel caso di $n=3$; i teoremi valgono in generale. Ecco qui le proprietà fondamentali e caratteristiche, a cui conduce lo studio del caso $n = 3$. Posto $\frac{x_1}{x_3} = u_1 + i\, v_1$, $\frac{x_2}{x_3} = u_2 + i\, v_2$ si ha:

L'assoluto è rappresentato dall'ipersfera G *definita da* $u_1^2 + v_1^2 + u_2^2 + v_2^2 = 1$. *Alle rette del piano complesso, in cui* x_1, x_2, x_3 *sono coordinate omogenee corrispondono degli spazii* G_2, *a due dimensioni, caratterizzati geometricamente dall'appoggiarsi a due rette fisse immaginarie coniugate. Per due punti* A, B *dello spazio ambiente passa perciò uno e un solo di questi* G_2.

In ognuno di questi G_2 *la metrica subordinata che ne viene definita è una metrica pseudosferica il cui assoluto è l'intersezione* I *di* G_2 *con* G; *i cerchi dei nostri* G_2 *che tagliano il corrispon-*

dente cerchio I *ortogonalmente sono le geodetiche della nostra metrica; per due punti* A, B *dello spazio ambiente passa uno solo di questi cerchi, che incontra* G *in due altri punti* C, D. *Il logaritmo del rapporto anarmonico dei punti* A, B, C, D *è a meno d' un fattore costante la distanza geodetica* A B. *Di più ognuno degli spazii* G_2 *è totalmente geodetico.*

Per forme Hermitiane definite valgono considerazioni analoghe; queste osservazioni bastano alla concezione geometrica delle nostre metriche, e alla immediata estensione ad esse dei metodi che si seguono per lo studio dei gruppi di movimenti negli spazii a curvatura costante.

Darò ora gli enunciati dei teoremi fondamentali per le applicazioni funzionali dei nostri gruppi, che io, come dissi, dimostro in un altro lavoro.

I. *Sia dato un qualsiasi sistema* Σ *di forme quadriche dei soliti tipi, di cui* n *a tre variabili,* m *a quattro variabili.*

Le prime di queste forme uguagliate a zero rappresentano delle coniche e sia λ_i (i=1, 2,..., n) *il parametro complesso, che definisce i punti della* i^esima^ *di queste coniche. Le seconde delle forme precedenti definiscono delle quadriche; i parametri che definiscono le generatrici della* i^esima^ *di queste quadriche* (i = 1, 2,..., m) *si indichino con* μ_i, ν_i. (μ_i, ν_i possono considerarsi come coordinate di un punto della quadrica in discorso). *Un gruppo discontinuo che trasformi in sè* Σ *definisce un gruppo propriamente discontinuo di trasformazioni lineari sulle variabili* λ, μ, ν. *Esistono sempre delle funzioni analitiche uniformi non costanti di queste variabili* λ, μ, ν *invariate per il gruppo in discorso.*

II. *Sia dato un sistema* Σ *di* k *forme Hermitiane a* $n_i + 1$ (i = 1, 2,... k) *variabili. La* i^esima^ *di tali forme sia del tipo*

$$x_1^{(i)} \xi_1^{(i)} + \dots + x_{n_i}^{(i)} \xi_{n_i}^{(i)} \pm x_{n_{i+1}}^{(i)} \xi_{n_{i+1}}^{(i)}$$

dove le $\xi^{(i)}$ *sono le variabili immaginarie coniugate alle* $x^{(i)}$.

Si ponga $\dfrac{x_t^{(i)}}{x_{n_{i+1}}^{(i)}} = u_t^{(i)}$ $(i = 1, 2,\dots, k;\ t = 1, 2,\dots, n_i)$. *Un*

gruppo discontinuo che trasformi Σ *in sè definisce un gruppo discontinuo di trasformazioni sulle* $u_t^{(i)}$. *Esistono delle funzioni analitiche delle* $u_t^{(i)}$ *invarianti per il gruppo.*

I risultati della presente memoria permettono di dimostrare rapidamente con metodi analoghi a quelli di Poincarè i precedenti teoremi, che danno la più ampia generalizzazione delle funzioni automorfe a una o più variabili e che includono in sè tutti i casi finora noti come casi particolarissimi. (*) Nel lavoro citato accenno infine a un'altra ancora maggiore estensione per i gruppi discontinui di cui ogni trasformazione è il prodotto di una proiettività su un numero qualsiasi di variabili « x », di una proiettività su un altro sistema qualunque di variabili « y » e così via. Questo generalissimo caso sembra però non presentare, come i precedenti, tante e così svariate relazioni con problemi algebrici, geometrici, numerici.

(*) Osserverò che i teoremi precedenti non stabiliscono che l' esistenza di funzioni analoghe alle funzioni automorfe: il lettore può del resto riconoscere facilmente che si possono costruire funzioni analoghe alle funzioni zeta-fuchsiane di Poincarè, le quali possono essere utili nello studio dei sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali, il cui integrale generale dipende da un numero finito di costanti arbitrarie. (Un caso particolare di tali sistemi è studiato da Picard nel 11° Volume degli Acta Mathematica).

Memoria V.

A. Riccò e S. Arcidiacono

L'ERUZIONE DELL'ETNA DEL 1892

Parte III.

VISITE ALL' APPARATO ERUTTIVO ED AL CRATERE CENTRALE

Noi due, accompagnati dal custode Galvagno, abbiamo fatto 16 visite all'eruzione in corso, altre 20 ne ha fatte Galvagno solo; parecchie altre ne abbiamo fatte anche dopo cessata l'eruzione.

Queste visite, oltre a farci conoscere da vicino l'apparato eruttivo e le lave, servivano a completare le informazioni che ricevevano e le osservazioni che facevamo continuamente da Catania coi potentissimi cannocchiali dell'Osservatorio, i quali riducevano l'eruzione all'apparente distanza di poche centinaia di metri: talchè se ne potevano seguire anche i minuti particolari; favoriti pure dalla circostanza, per noi fortunata, che l'eruzione si svolse appunto nel versante meridionale del vulcano, rivolto all'Osservatorio.

Durante l'eruzione abbiamo passato parecchi giorni di seguito ed anche parecchie notti all'Osservatorio Etneo, mentre a 1000 m. sotto di noi rumoreggiava l'eruzione, ed a 1000 m. a nord di noi rombava il cratere centrale. Alla fine di ottobre 1892, quando era alquanto scemato il furore dell'eruzione, potemmo anche fare lassù buone osservazioni astronomiche al grande refrattore, per otto giorni, con cielo splendidissimo, mentre un

campo o strato di nubi, di quando in quando attraversato dalle colonne di fumo sorgenti dall' eruzione, copriva la Sicilia e ci isolava anche otticamente dal resto del mondo.

Nel nostro soggiorno lassù non abbiamo provato altro inconveniente che delle esalazioni sulfuree soffocanti, abbastanza frequenti, provenienti dal cratere centrale, che ci obbligavano a chiudere ermeticamente l' Osservatorio, ed alcune scosse, talora forti ed anche fortissime, le quali però non produssero che effetti insignificanti sul fabbricato solidissimo dell' Osservatorio.

Visite di A. Riccò durante l' eruzione.

11 Luglio 1902. — Recatomi a Nicolosi, centro abitato il più vicino all' eruzione (tre giorni dopo che era scoppiata), per vederla meglio, mi porto ad un km. ad est del paese, sulla via tra Nicolosi e Pedara, al cancello della vigna del Sindaco Abate, in un punto distante 9 $^1/_2$ km. dai crateri eruttanti. A $4^h 30^m$ se ne vedono tre, i quali hanno già formato un cono abbastanza elevato sul terreno circostante: i due superiori lanciano in alto scorie e lapillo incandescenti; il più basso emette lava: inoltre vi è più in giù ed alquanto a levante, una bocca pocò elevata, che pure emette lava. Questa bocca della lava, per essere senza cono rilevato ed in terreno basso, non poteva essere vista da Catania, e perciò manca nel disegno fatto all' Osservatorio la sera stessa. Diriggo il telespettroscopio, tanto allo interno dei crateri, che sui getti di materiali incandescenti che eruttano, non scorgo alcuna riga lucida; nessuna di quelle dell' idrogeno, a noi famigliari nella osservazione della cromosfera solare; della riga lucida *D* del sodio si vedono solo traccie incerte di inversione.

Ritornato in Nicolosi, ricevo le seguenti informazioni dal Sindaco, dal Capo delle guide Etnee e dal Custode dell' Osservatorio Etneo. Queste notizie date subito, mentre erano fresche e vive le impressioni, sarebbero state molto importanti, ma per

la complicazione e variabilità dell' apparato eruttivo, e per la difficoltà di identificare le varie bocche che apparivano sulle due fratture, e poi si fondevano tra loro, o scomparivano, non si possono utilizzare tutte per la prima descrizione del fenomeno. Ciò che mi risultò di sicuro è quanto segue.

Alle $13^h 20^m$ del 9 luglio si formarono parecchie bocche sulla frattura occidentale, che poi si ridussero ad una sola, *H* (Parte II, Tav. III. Fig. 2), attiva, multipla, formata di 3 a 4 aggruppate, le quali emisero la prima colata diretta a Monte Faggi; alle $14^h 30^m$ su di una altra frattura più orientale si formò la bocca che abbiamo chiamata *C*, la quale diede la colata principale, diretta a M.^te^ Nero; alle 15^h si produsse un' altra bocca *A* sulla frattura orientale; e dopo ancora un'altra *B*. Poscia, più in alto a nord, sulla frattura occidentale si aprì un'altra bocca *F*, che più tardi si ridusse a semplice fumarola, che dava solo fumo bianco.

Da questa relazione risulta che in generale su entrambe le fratture prima si aprirono in basso le bocche emettenti lava, poi più in alto si formarono le bocche che funzionavano come camini del focolare vulcanico, eruttando fumo e materiale sciolto; inoltre emerge che l' eruzione cominciò sulla frattura orientale, poi si continuò sulla occidentale.

Oltre queste bocche principali, se ne formarono sulle due fratture altre minori, in tutto 15 a 20, che poi in parte hanno cessato d' agire, come fecero prima o dopo tutte quelle impiantate sulla frattura occidentale: altre sono state rinchiuse nei tre coni, *A*, *B*, *C*, che tosto si formarono coi materiali eruttati dalla frattura orientale.

Nella notte seguente, 9-10, essendosi formato un accumulo di lava fluida sul fianco occidentale di M.^te^ Nero, ne partiva ad 1^h una colata sinuosa di lava: il che fece credere alla formazione di una bocca anche sul detto monte, e ad una estensione e gravità dell' eruzione, ancora maggiore del vero.

La prima colata, partita dalle bocche occidentali alle 13 $^1/_2$ del 9 luglio, giunse alle 10 $^1/_2$ del 10 alquanto oltre il piede

orientale di M.te Faggi e si fermò, avendo percorso 2 km. in 21 ore, cioè colla velocità media di circa 120 m. all'ora.

L'altra grande colata, partita dalle bocche orientali alle ore 14 $^1/_2$ del 9 luglio, incontrato che ebbe M.te Nero, si divise in due rami: a mezzanotte il ramo occidentale era giunto a M.te Ardicazzi, e l'altro a M.te Gemmellaro, procedendo rispettivamente di 2 km. e 3 km., colla velocità di 216 a 217 m. all'ora.

Al mattino del 10 luglio la colata più occidentale, era giunta a M.te Concilio, l'altro ramo era arrivato ai *Dagalotti dei Cerri*: a mezzanotte dell'11-12 luglio la colata occidentale distruggeva il pometo di Rinazzi, la orientale era giunta oltre M.te Albano.

Abbiamo saputo pure che la scossa avvertita a Nicolosi il giorno 8 luglio alle $22^h 30^m$ con direzione N-S, fu forte a Ragalna, con direzione E-W: produsse la caduta di muri a secco, e qualche danno alle case.

Durante la notte del 10 all'11 i coni erano molto aumentati in grandezza. Dalle 5^h a 5^h $^1/_2$ dell'11 luglio molto e denso fumo grigio-oscuro veniva eruttato dal cratere centrale.

Nel pomeriggio dello stesso giorno, 11 luglio, partiamo per il così detto *teatro dell' eruzione* e ci dirigiamo al lato di ponente, costeggiando a sud i M.ti Rossi; passati questi, alle 19^h ci si presenta la montagna ignivoma in piena attività: dal fianco meridionale staccasi una immensa colonna di fumo diretta quasi orizzontalmente a SW; i raggi del sole vicino al tramonto la colorano in aranciato: un'altra colonna di fumo denso, quasi nero, che esce dalle bocche eruttive con maggior violenza, si dirige quasi verticalmente dietro l'altra colonna; dal cratere centrale sono eruttate masse di denso fumo bianco in globi piccoli, fitti, a contorno tagliente.

Procediamo seguendo il piede occidentale dei monti Rinazzi e Concilio: si odono continui rombi, di cui alcuni fortissimi; si vede un nuovo braccio di lave più ad Est; saliamo

per l'erto pendio del più avanzato a nord dei M.[ti] Ardicazzi, e arrivati alla cima, alle 21 ½, restiamo attoniti innanzi alla scena prodigiosa che ci si spiega davanti. Siamo a due chilometri e mezzo dal luogo dell' eruzione. In alto fiammeggiano tre crateri, *A*, *B*, *C*, di cui quello di mezzo dà un doppio getto di fuoco: a sinistra, cioè a NW, vi è un' altra piccola bocca poco attiva, *F*, (Tav. III, Fig. 2) appartenente alla frattura occidentale. I materiali, lapilli e bombe incandescenti, scagliati verticalmente e con grande violenza, specialmente del cono *B*, arrivano fino ad un'altezza, che dall'angolo sotteso, risulta di circa 400 m. Sovrasta a questa batteria una vasta nube color di fuoco, per riflessione, come splendido velario di porpora. In basso si stende a perdita di vista un immenso incendio, una inondazione di fuoco, che nè penna di poeta, nè pennello d' artista varrebbe a descrivere. Sotto alle bocche una grande cascata ardente precipitasi nella sottoposta valle, divisa in rivi di fuoco; dalla caldaia di lava liquida, nel fianco occidentale di M.[te] Nero, scende tortuoso un altro fiume di lava, tutto questo fluido ignescente passa sotto di noi; lambendo il piede della collina sopra cui siamo e delle altre che seguono verso sud, fino a M.[te] Rinazzi. In faccia a noi la colata di levante, dopo aver girato dietro M.[te] Nero, spunta a sud in forma di una *rapida*, la quale nella sottoposta valle unendosi alla colata di ponente, ha già formato un immenso cumulo, una vera montagna di lava, intersecata da rivoli di fuoco: la quale, scendendo nella pianura a mezzodì, si estende fin davanti a M.[te] Albano. Un'altra larga cascata scende per il Dagalotto dei Cervi, passando a nord di M.[te] Gemmellaro e traversando la valle, e si unisce alla corrente di ponente. Infine un altro ramo di lava scorre dietro (ossia a levante) di M.[te] Grosso e M.[te] Albano.

Una infinità di canali, ruscelli, cascatelle di lava percorrono velocemente in tutte le direzioni quell' immenso campo di fuoco: la lava superficiale, già raffreddata e consolidata, viene trascinata dalla corrente liquida e rotola e precipita con un ru-

more, uno scroscio continuo, simile a quello della caduta di un mucchio di tegole: pare la rovina causata dalle tremende esplosioni di grandi artiglierie cui assistiamo, e di cui risentiamo penosamente la ripercussione nella nostra cassa toracica. Un bagno di mercurio posato a terra oscilla continuamente e largamente, in massa, entro la vaschetta. Piove quasi continuamente minuto e caldo lapillo e cenere: di quando in quando ci arrivano folate d'aria calda, soffocante, ed a questa molestia si aggiunge l'intenso calore che irradiato dalla lava che scorre al piede della collina su cui ci troviamo; ma noi quasi non ci accorgiamo di nulla, tanto la nostra attenzione è assorbita da quella scena di terribile bellezza: dal cui fascino a stento io mi sottraggo per tentare di farne uno schizzo e per intraprendere le mie osservazioni; e confesso che di fronte a questa grandiosa ed imponente manifestazione delle forze naturali, mi sentivo invaso da un senso inconscio di sbigottimento, direi di annientamento, come avevo provato nel furore di una grande burrasca in mare.

Sotto l'ostinata pioggia di cenere, montiamo il telespettroscopio di Browning, il cui pesante corredo abbiamo trasportato con difficoltà sul monte: lo dirigiamo successivamente alle varie bocche ed alla lava più incandescente, ma non osserviamo nulla di nuovo; anzi le traccie della riga lucida del sodio sono quasi totalmente deficienti. Si tentano delle fotografie con pose varie, perfino di cinque minuti; ma, come era da aspettarsi dal colore rosso della luce dominante e dalla scarsità in esse dei raggi che hanno azione chimica, sulle lastre *Lumière* (non isocromatiche) sviluppate poi, non si ottenne che una macchia diffusa al luogo della grande nube sovrastante alla scena dell'eruzione.

Nel ritorno ci affacciamo meglio a vedere la lava del ramo occidentale, diretto verso sud, che ha già distrutto il rigogliosissimo pometo di Rinazzi, il quale formava l'ammirazione di tutti i visitatori dell'Etna, per l'accuratissima cultura, l'ubertosa produzione, la naturale e bonaria cortesia dei coltivatori, sempre pronti e contenti di far gustare i saporiti, ma non vie-

tati, frutti di quel verde, fresco, piccolo paradiso terrestre, che ora è trasformato in infernale bolgia infuocata.

Scendiamo dalla collina fin presso la lava, la cui massa ha il corso simile a quello di un ghiacciajo, lento ma fatale, animato dai rivoli e cascatelle di lava liquida incandescente che scorrono da ogni parte, allo smuoversi della crosta superficiale, al cadere dei massi induriti. È una immensa diga, una lunga montagna ardente alta forse 50 metri in alcune parti, che si avanza minacciosa verso le terre coltivate ed abitate!

All' alba siamo di ritorno a Nicolosi.

12 Luglio.—In Nicolosi si dice che l' eruzione è molto aumentata, che le colate sono tutte avanzate, che è completamente invaso il piano di Rinazzi. Continuano le frequenti e forti detonazioni, che producono tremiti del suolo, seguite da colpi od ondate di aria, che scuotono le imposte: il bagno di mercurio, che ho collocato nell' albergo Mazzaglia in Nicolosi è quasi in continua agitazione.

In questo giorno ci proponiamo di visitare le fronti della lava per conoscere bene la loro posizione e il loro stato, ed anche per vedere se realmente vi sia pericolo imminente d' invasione per Nicolosi od altra delle importanti borgate vicine, affinchè, occorrendo, le Autorità possano prendere i necessari provvedimenti per lo sgombro delle case; perciò viene con noi anche il Maggiore dei carabinieri, appositamente recatosi da Catania a Nicolosi.

Ci dirigiamo prima alla colata di ponente. Arrivati al punto ove la via da Nicolosi a Piano Rinazzi, per gli Altarelli, lascia la lava del 1886, vediamo lo spettacolo comune nelle eruzioni, ma pure assai interessante, dei vortici di sabbia e fumo che dal luogo della eruzione sorgono a grande altezza in forma di sottili colonne serpeggianti: una di queste s' innalza a circa 15°, cioè a 1400 m. d'altezza.

Arriviamo a $13^h \, {}^1/_2$ alla fronte della lava di ponente, la

quale, oltrepassato Rinazzi, si dirige a SE, costeggiando la colata del 1886, e sta invadendo il fresco e giovane castagneto di Frustella. La fronte è irregolare, molto larga, ed in alcune parti, specialmente ad ovest, arriva all'altezza di una diecina di metri. Alla luce viva del giorno non pare una massa di materia incandescente, ma piuttosto un enorme ed oscuro mucchio di carbone coke, male spento, che una forza interna misteriosa spinga avanti lentamente, travolgendo i blocchi superficiali; questi nel cadere mettono in vista e trascinano con loro dei pezzi incandescenti, fra i quali si vedono scorrere pochi rigagnoli di lava liquida. A 6 m. di distanza il calore irradiato è intollerabile e non si può stare fermi a distanza minore di 8 m.: con un lungo ramo d'albero stacchiamo dalla colata qualche blocco incandescente e lo tiriamo fino a noi: il ramo si accende al contatto di quella lava incompletamente consolidata. Si tenta di determinare almeno approssimativamente la temperatura gettando al piede della colata una pietra avvolta da vari fili metallici e trattenuta da un forte filo di ferro: si lascia che venga coperta dalla lava e poi si ritira: lo zinco si è fuso, ma l'ottone ha resistito: ciò indicherebbe una temperatura inferiore a 800°, però dubitiamo che non vi sia stato contatto completo con la lava liquida: ripetiamo la prova lasciando più a lungo i fili a seppellirsi sotto la colata, ma tirando il filo di ferro non si riesce più ad estrarre gli altri fili.

Ma di ciò si è occupato con tutta la cura e precisione possibile il compianto prof. Bartoli, il quale col metodo calorimetrico ha trovato nella lava vicino alla sorgente fin 1060°, poi temperature decrescenti fin a 750° a tre km. dalle bocche eruttive (1).

La fronte avanza lentamente, in modo appena percettibile all'occhio attento: valutiamo, colla misura della distanza degli alberi successivamente investiti, una velocità di circa un metro

(1) *Sull' Eruzione dell' Etna scoppiata il 9 luglio 1892.* Bollett. della Soc. Met. ital. Serie II, Vol. XII, N. 11.

al minuto: ma si comprende che questa velocità è variabile secondo la pendenza e configurazione del suolo, la forma e lo stato di maggiore o minore fluidità della colata.

Non si può fare a meno di provare un senso di compassione per quei begli alberi condannati ad essere arsi vivi; già prima che il fuoco li colga, per il gran calore che emana dalla lava, le foglie avvizziscono e si scolorano, i rami si torcono: arriva la lava che circonda e soffoca la misera pianta col suo amplesso di fuoco: la vittima stride e sibila, poi una viva fiammata, prodotta dagli idrocarburi rapidamente distillati, pone fine al tormento; che talora è seguito da piccole detonazioni causate da vapori o gaz che si estricano violentemente. La grande e nera massa, che col piede di fuoco si avanza sinistramente nel folto del verde bosco, produce in noi un effetto strano, un senso di tristezza ed orrore.

Invece i coraggiosi coloni del luogo col maggior sangue freddo cercano di strappare al fuoco invadente alcuni alberi, che a pochi metri di distanza dalla lava abbattono rapidamente, spogliano dei rami e trascinano lungi. Il rumore della colata che avanza nel bosco non è grande: vi domina quello di fiumana che straripa ed il crepitìo delle piante che ardono: vi si aggiunge di quando in quando lo strepito dei blocchi di lava indurita che cadono, urtandosi tra loro e cogli alberi vicini, o col terreno.

Si discute sulla via che probabilmente seguirà la lava, ed il custode dell' Osservatorio Etneo indica la depressione del terreno per cui la nuova colata passerà sulla lava del 1886; il che si verificò infatti nei giorni susseguenti.

Lasciamo questa scena penosa, per recarci all' altra fronte della lava a levante, la quale è già arrivata tra i M.^{ti} Nocilla e Serra Pizzuta, ma più vicino al primo, in faccia al M.^{te} Camercia. Ci fermiamo a pochi metri di distanza su di un'altura della lava del 1776. Sono le $19^h\ 45^m$ e la luce men viva del crepuscolo ci permette di distinguere bene i fuochi della lava e dell' eruzione.

La lava ha due fronti savrapposte: nell'inferiore, quasi totalmente nera, serpeggiano pochi rigagnoli di lava liquida; la più alta e più recente è meno avanzata, ha il ciglio superiore quasi tutto incandescente e la punta più avanzata ad oriente presenta in testa una cascata ignescente. È tale l'altezza complessiva di questa fronte, che ci chiude quasi tutto l'orizzonte visuale a ponente, dove non vediamo sporgere che la cima di M.te Concilio: a nord ci copre più di metà della vetta del M.te Gemmellaro. Gli ingegneri del Genio Civile hanno trovato anche per questa colata la velocità di circa un metro al minuto. La lava ora scorre su di un terreno quasi privo di vegetazione arborea, perchè formato di lave antiche, e l'impressione penosa che proviamo dipende, più che dal pensiero dei danni prodotti, dalla minacciosa grandezza della massa che si avanza lentamente.

Conchiudiamo dalle nostre indagini che se vi è pericolo per le sottoposte floride borgate di Borrello, Belpasso, Nicolosi, Pedara, considerata la poca velocità delle lave ed i molti ostacoli che presenta il terreno, il pericolo non è imminente, per modo che non occorre prendere per ora alcun immediato provvedimento.

Nella notte seguente a Nicolosi si odono rombi pochi e deboli; alle $6^h 45^m$ del giorno 13 si vede uscire poco fumo bianco dal cratere centrale, molto fumo oscuro dall'apparato eruttivo, il quale fumo si dirige a levante in lunga colonna quasi orizzontale; dalle lave recenti emanano vapori bianchi.

19 Luglio. — Viaggio all'Osservatorio Etneo e visita all'apparato eruttivo. Desiderando collocare il più presto possibile all'Osservatorio Etneo un apparato registratore della temperatura e della pressione, appositamente costruito dal Richard di Parigi, mi reco lassù per stabilire il luogo e modo in cui il meccanico dell'Osservatorio l'avrebbe poi messo a posto: inoltre questo viaggio mi avrebbe data occasione di studiare ancora l'eruzione in corso.

Arrivato a Nicolosi a 13^h si odono alcuni rombi forti, con

una specie di rullo; a 17^h, oltrepassata la lava del 1886, sulla via dai M.[ti] Rossi a S. Leo, si presenta l'eruzione con una enorme e magnifica massa di fumo che si libra quasi orizzontalmente diretta a ponente, che il sole basso illumina di luce di color aranciato: copiosi vapori bianchi si sollevano dalle lave recenti.

Dopo mezz'ora di strada nel Piano della Sciara, a circa 2 chilometri a sud di M.[te] S. Leo, incontriamo la testata della lava. A $18^h 30^m$ vediamo una eruzione di fumo nero come carbone, a piccoli globi, poiche diviene chiaro, lasciando cadere la cenere. A $18^h 50^m$ si arriva a *Casa del Bosco;* si odono continui boati e fracassi, come di impalcature o murature che cadono; i crateri più alti eruttano fumo nerissimo, quelli di sotto fumo bianco, più in basso ed a levante si vedono le bocche che eruttano fuoco.

Alle ore 20 ½ dalla via fra M.[te] Castellazzo e la Montagnola, a circa 800 m. dall'apparato eruttivo, ci si presenta nell'oscurità della notte lo spettacolo delle splendide deflagrazioni delle nuove bocche: se ne vedono 4 in fila: la più alta a nord, *A*, emette molto fumo nero e poco fuoco; la seconda, verso sud, *B*, emette delle gigantesche lingue di fuoco formate da abbondante lapillo incandescente, che ci illumina la via; la terza, *C*, erutta molto lapillo e scorie incandescenti; la quarta *D* emette lava; dall'orlo del cono *B* si vede partire una striscia infuocata, colata o spaccatura (non si può riconoscere bene per la distanza) diretta a NW. Talora sorgono simultaneamente tre grandi getti di materiale incandescente fin all'altezza di 8°, cioè 80 a 90 m., che ricade sulle falde dei coni e le copre di fuoco: blocchi e brandelli di lava incandescente rotolano giù per i pendii, specialmente dei coni meridionali, dai quali anche si vede scendere la lava in colata.

Alle 23^h ½ arriviamo all'Osservatorio Etneo. Nella notte si sentono boati abbastanza forti e si avverte uno scuotimento sensibile del suolo, specialmente verso l'alba.

20 Luglio.—Nel mattino all'Osservatorio Etneo si odono rombi molto forti; alle $11^h 40^m$ si riparte per l'apparato eruttivo; alle $13^h \frac{1}{2}$ siamo a circa $\frac{1}{2}$ km. a NW di esso; il cratere più vicino *A* (Tav. III, Fig. 1) è il maggiore della serie, ha già la proporzione di una collinetta che si stima alta una cinquantina di metri; col teodolite trovo che la cima sottende sulla base un angolo di 4° 10', che alla distanza stimata di 500 m. darebbe l'altezza di 37 $\frac{1}{2}$ m. però la base dei crateri è molto rialzata su terreno circostante dal materiale ricaduto attorno.

Questo cono a NW è squarciato da due larghe bocche, separate da un sottile tramezzo, di queste però l'inferiore (al 20 luglio) è ridotta pressochè allo stato di fumarola ed emana tranquillamente molto fumo bianco: sopra di essa, sul cono *A*, vi è un gruppo di fumarole attivissime: sopra ed a destra vi sono delle sublimazioni gialle sul fianco occidentale del cono: la bocca superiore, invece, da diverse aperture erutta in quantità enorme fumo di varie tinte: bianco, grigio impuro, nero come carbone per cenere vulcanica trascinata dal vapor acqueo; questo fumo arriva all'altezza angolare di 25° 15', che alla distanza di $\frac{1}{2}$ km. dà 215 m. Il cratere di mezzo *B* ha forma conica più regolare dell'altro *A*; dall'ampia e multipla bocca lancia pure abbondante fumo delle tre dette tinte, ed inoltre emette pure diafane emanazioni azzurre; di più scaglia con forza minuto lapillo. Il terzo cratere *C*, che è quello sovrastante alla bocca della lava, è di forma irregolare allungata a conca, erutta fumo bianco e giallo impuro, e inoltre lancia con violenza lapillo e bombe infuocate.

A ponente del cono *A*, alla distanza di una ottantina di metri dal suo piede, vi è la bocca multipla *H* (Tav. III, Fig. 2), formata da tre cavità aggruppate, con orli irregolari, poco elevati; la quale diede la prima piccola colata di lava, che si vede come un argine nero, parallelo alla fila dei crateri (Tav. IV, Fig. 1). Più in giù a Sud vedesi la grande corrente di lava liquida, la quale, trascinando blocchi parzialmente consolidati, si dirige a

M.[te] Nero, che appare nel secondo piano, in fondo al quadro (Tav. IV, Fig. 2).

Il fumo esce dalle bocche con grande velocità, da prima sotto forma di strette colonne o lingue, per lo più acuminate, le quali poi si allargano contorcendosi e ravvolgendosi in globi compatti, come balle di cotone, prima piccoli, poi grandi, e assumendo forme capricciose, che spesso rammentano l'aspetto di un orso velloso o di una scimmia che si slanci fuori del suo covo (Tav. IV, Fig. 1). Il fumo quindi si dilata rapidamente in vasta estensione e grande altezza, e si scolora lasciando cadere una pioggia di cenere che si vede scendere a strisce. Dalla grande colata che corre verso sud incanalata fra due argini o morene di lava emana copioso vapore azzurrognolo (Fig. 2). Forti detonazioni ed un fracasso caratteristico accompagnano le principali eruzioni. (*)

Ci avviciniamo fino a 200 m. dal cono di mezzo: il suolo si agita molto sensibilmente sotto i nostri piedi ad ogni esplosione: su di noi cade poca cenere e minuto lapillo caldo, perchè il vento di NW spinge i materiali eruttati verso SE: neppure avvertiamo odore di zolfo; come non vediamo prodursi gli anelli di fumo, che altri hanno visto in questa ed in altre eruzioni.

A 400 m. a NW dell'apparato eruttivo osserviamo una frattura del terreno, nella direzione NE-SW irregolare, multipla; si vedono altre fratture minori sparse a ponente dell'apparato medesimo. A distanza scorgiamo un nuovo braccio di lava che da M.[te] Guardiola si dirige a M.[te] Serra Pizzuta.

Nel tornare a Nicolosi a sera vediamo la testata di lava più avanzata verso il detto paese, la quale sta per raggiungere la via che da mezzodì dei M.[ti] Rossi va a S. Leo: la lava ne dista solo 10 m.: devasta e seppellisce campi coltivati a segala, a vigne, a pometi; molti villici si affaccendano per salvare quanto è possibile dalla lava invadente.

(*) La Fig. 2 può considerarsi come continuazione della Fig. 1 verso destra, immaginando di far coincidere le immagini del cono *D* nelle due figure.

1 Agosto. — A Nicolosi, intorno a mezzodì, si odono pochi rombi leggeri, come in lontananza: il cratere centrale dà poco fumo: è coperto da incrostazioni gialle e rosse.

A 16^h siamo a *Casa del Bosco*, cioè a 3 km. dall'apparato eruttivo: pochi rombi, non forti, prolungati; il primo cono a nord, *A*, il più grande, è gibboso; ha la bocca inferiore molto sviluppata ed assai attiva, che emette fumo grigio; la bocca superiore dà poco fumo azzurrino. Il cratere *B* di forma conica, quasi regolare, un po' slabbrato verso nord, erutta fumo nero con lapillo e cenere: il suo getto arriva fino a 9°, cioè 480 m. d'altezza. Il cono *C* molto ingrandito ed allungato a sud, manda poco fumo bianco e scorie incandescenti in un getto poco alto, diretto obliquamente a sud. Il conetto *D* si è fatto ben distinto e di forma regolare conica: emette fumo bianco denso.

Giunti a Pilatella, a circa 400 m. dal cono più settentrionale, osserviamo che il fumo che esce dalla sua bocca inferiore ha una tinta alquanto rossastra, forse per riflessione della lava sottostante. Ci rechiamo poscia sulla prima colata, uscita dalle bocche di ponente, per veder meglio tutto l'apparato eruttivo, e riconosciamo che è aumentato molto di dimensione dal 20 luglio in poi. Alla distanza di 200^m dalla bocca inferiore di *A*, ed a NW di essa, vediamo una delle bocche estinte *G* (Tav. III, Fig. 2) formatasi sulla frattura occidentale: è come un foro rotondo nel terreno, che è un poco elevato attorno, a pendio debolissimo. A 19^h, nel salire, passando a poca distanza dalle bocche settentrionali, a *Tacca dell'Arena*, essendo diminuita la luce solare, si vede che le due bocche di *A* sono veramente illuminate dalla lava sottostante; la inferiore oltre del fumo getta anche lapillo e fa un grande rumore continuo, come di treno. Si stimano le altezze 150 m. per *A*, 100 m. per *B*, 50 m. per *C*.

Alle $21^h 45^m$ si arriva all' Osservatorio Etneo: si ode un rumore continuo dall'eruzione; a $0^h 30^m$ del 2 Agosto forte terremoto sussultorio; alle 8^h si parte per il cratere centrale, gi-

rando per W; a 9^h incontriamo la cenere eruttata nella notte dell' 8 luglio, forma una striscia larga circa 100 m. estesa da NW a SE; a 9^h 15^m arriviamo sul ciglio del gran cratere: nell'interno non si vede che fumo: e molto fumo solfureo, acido, soffocante, viene da una fumarola che sta su di una punta dell'orlo a ponente. Osserviamo che ha avuto luogo di recente una grande frana che ha fatto cadere 1 a 3 m. del ciglio tutt'attorno da E ad W per nord, prendendo metà del giro del cratere.

La temperatura dell'aria sull'orlo è 9°,7, mentre sulle falde del cratere era 8°,7; nelle fumarole che si trovano sul lato nord del ciglio si ha 80°.

Discesi dal cratere centrale, andiamo a vedere la grande frattura del terreno prodottasi all'epoca dell'eruzione del 1883 e che passa a 50 m. W dall'Osservatorio: il custode Galvagno non la trova cambiata: solo è alquanto diminuita di profondità per materiale che vi è caduto dentro.

Scendendo dall' Osservatorio a 15^h $^1/_2$ siamo al piede meridionale della Montagnola, a ponente dei M.ti Calcarazzi, sul sentiero dei *nerajoli* di Pedara, a circa 500 m. a NNW dalle nuove bocche, vicinissimi al luogo ove poi si aperse la bocca più settentrionale. Davanti a noi, a circa 20 m. verso sud, vi è una delle bocche estinte *F* (Tav. III, Fig. 2) della prima frattura: seguono in fila verso sud parecchie altre bocche estinte *G*, *H*, ecc. della prima frattura occidentale, in tutto circa una diecina tutte di pochi metri di diametro, fatte ad imbuto con orli poco elevati. La bocca inferiore del cratere *A* è sempre assai attiva e rumorosissima: emette fumo azzurro con riflessi rossastri.

Volendo visitare da vicino la parte meridionale dell' apparato eruttivo, e non potendo avanzare nella stretta zona di terreno chiusa dalla prima colata, diretta a M.te Faggi, e dalla fila delle bocche che lanciano brandelli di lava e bombe, e rendono il passaggio pericoloso, giriamo alla larga ad ovest e, giunti al livello dei coni meridionali, ci dirigiamo ad est, verso lo sbocco della lava, attraversando il suddetto braccio di lava, la cui super-

ficie irregolare, formata di blocchi sciolti ed aspri, è assai faticosa a percorrere, ma sicura, perchè consolidata e molto raffreddata. Io ed il custode dell' Osservatorio Etneo, con maggior pena montiamo sull' altra lava che come argine o morena limita a ponente il corso della lava liquida e che, per essere più recente, è ancora molto calda, e per essere più vicina al luogo della maggior attività eruttiva, è ancora più irregolare e difficile dell' altra. Il calore è assai intenso ed accresce la fatica, ma finalmente arriviamo sul ciglio; restiamo estatici, direi quasi allibiti, davanti al quadro meraviglioso che ci si offre; a destra, in alto fra due muraglie di roccie stranamente frastagliate, che formano una specie di baratro profondo, si precipita la lava che trabocca dalle viscere del cratere e forma una enorme cascata incandescente, abbagliante, alta circa una diecina di metri, larga cinque.

Il getto di un convertitore Bessemer, che versa ad ogni colata migliaia di chilogrammi di acciaio fuso, e che tanto impressiona e quasi spaventa chi per la prima volta lo vede funzionare, è uno zampillo insignificante, un nonnulla in confronto di questa cateratta ardente, la quale si avanza poi come fiume di fuoco sanguigno, denso, marezzato a larghe chiazze roteanti, che scorre velocemente ai nostri piedi, a 6 m. di distanza colla velocità di circa 2 m. al secondo, trascinando enormi massi di lava parzialmente solidificata: grandi colonne di fumo sorgono da tutte le parti. Pare proprio un' ordinaria cascata, in cui l'acqua è sostituita dal fuoco, ed ove, invece della fresca nebbia formata da acqua polverizzata, si hanno caldi e molesti vapori, che solo a tratti lasciano vedere questa magica trasformazione dell' acqua in fuoco.

Rapidamente montiamo la macchina a piede e prendiamo alcune fotografie alla meglio, poichè il calore che ci viene da tutte le parti è appena tollerabile, e quello che irradia dalla lava incandescente è tale che non si può rivolgere ad essa la faccia che per pochi secondi; inoltre, spira un vento, violentis-

simo che ci strappa gli oggetti di mano: è il potentissimo *tiraggio* prodotto da quell' enorme focolare. Di più, sotto e fra i blocchi disordinati che ci reggono s' infiltra tuttora lava incandescente, che abbrucia la punta dei nostri bastoni d'appoggio; ci decidiamo ad andarcene, quantunque a malincuore, perchè persuasi di non vedere mai più una scena di così grande e terribile bellezza.

Occorre appena di dire che i precedenti dati numerici non possono essere che grossolanamente approssimati, perchè rilevati in condizioni difficilissime, cioè essendo mezzo acciecati e soffocati dal fumo, assordati dalle detonazioni, minacciati dai crateri soprastanti e dalle lave sottostanti.

Colle predette fotografie, riuscite solo parzialmente per l'orgasmo e la fretta in cui furono fatte, abbiamo composto l'unito schizzo che può dare un' idea della scena.

Fig. a: Cascata di lava e colata dai crateri meridionali; 2 agosto 1892.

Quasi come *pendant* del cono *D*, sull'orlo ovest del cono *C*, vi è un piccolo cratere, o bocca, però inattiva.

Torniamo verso la prima colata e saliamo sul piccolo M.te Pomiciaro (rappresentato in bianco nella Tav. I), che limita ad est la lava della detta colata: così dall'alto possiamo vedere più completamente e con più tranquillità la parte meridionale dell'apparato eruttivo, che dista 300 m. da noi.

Vediamo che il cratere *D* lancia lapilli e grosse bombe: il cratere *C* pure erutta bombe e scorie e fa terribili detonazioni;

il cratere *B* emette fumo nero; vediamo lo spettacolo interessantissimo delle correnti di lava che escono l'una dal cratere *C*, sventrato verso sud, e l'altra dal cratere *D*, sventrato verso NW: la lava fluida ed i blocchi semi-incandescenti che escono in fila da questo cratere fanno una evoluzione verso sud, e si uniscono alla maggiore corrente che esce dal cratere *C* (Fig. **a**).

Alle $19^h 45^m$, nel tornare verso Nicolosi, vediamo un'altra notevole colata che scende ad Est di M.te Nero, formando un grande ammasso di lava incandescente, che pare esca da un'altra bocca; i rombi sono cessati, ed il fumo diminuito. A Nicolosi nella notte si odono rombi leggieri, ma il fumo è aumentato di nuovo; al mattino seguente del 9 agosto alle $6^h 50^m$ si avvertono parecchi rombi non forti, l'uno appresso all'altro. Si riparte per Catania.

18 Agosto 1892. — A $20^h \frac{1}{2}$ partenza da Catania coi Sig.ri Prof.ri Wallerant della Scuola Normale Superiore di Parigi, ed A. Chaudeau della Facoltà di Scienze di Besançon. Arrivati a Nicolosi alle $23^h 0^m$ vi incontriamo l'ing. Giarrusso del Genio Civile di Catania, il quale ci informa che la lava uscente dal cratere meridionale *C*, ha formato un argine o morena a ponente di M.te Nero e si riversa tutta a levante del detto monte; e che le colate le quali vanno verso i monti Guardiola, Ardicazzi, Concilio, camminano colla velocità di circa 60 m. all'ora: si sovrappongono a lave precedenti, e quindi non producono altri danni: egli dice pure che a 150 m. a SE del cratere *C* vi è una grande bocca di lava. Decidiamo di recarci sopra M.te Nero (d'onde si ha un ottima vista della eruzione), attraversando il ramo di lava di ponente, già consolidato; partiamo ad 1^h del 19, arrivati alla detta lava si presenta un individuo che si qualifica per lo stradino che ha fatto il nuovo sentiero sulla lava colle contribuzioni delle guide; dice che fu compiuto in 10 giorni da due uomini, cominciando da ponente, ove la lava si era prima consolidata, ma che al limite orientale contro il monte la

lava ha cessato di scorrere solo da due giorni. E dichiara che la sua opera è tanto perfetta e sicura, che noi possiamo restare sui muli, e così risparmiare le nostre gambe e le nostre calzature, e avere l'onore di essere i primi (come dice lui) ad attraversare la lava senza scendere dalle cavalcature; le povere bestie s'incamminano, di mala voglia, per la via scottante e malferma, ove alle salite ripidissime succedono delle discese che sono veri rompicolli; però non ci accade nessun sinistro, ed all'alba, dopo una buona mezz'ora di esercizi di equitazione i più strani, tocchiamo la terra ferma, cioè M.^{te} Nero, con un certo senso di sollievo, quantunque quella collina sia tutta circondata da lave fumanti, calde ed anche incandescenti.

Saliti sulla cima settentrionale alle 5^h, nella luce debole dell'aurora, vediamo il materiale infuocato, lanciato dai crateri *N* e *D*, (Tav. IV, Fig. 3) le lave incandescenti che scorrono dalle bocche di lava a SE del detto cratere *D* e traccie di fuoco anche nelle lave che scorrono lentamente al piede orientale del monte (Fig. 4). Io cerco invano la gran cascata di lava che vidi il giorno 2 di questo mese, e che dobbiamo avere in faccia, alla testa della fila dei crateri; ma la gran massa di fuoco è invisibile: una specie di cortina, o tramezzo, o tunnel di lava consolidata copre e chiude il baratro, lasciando però libera una larga apertura superiore che lancia fumo giallo e scorie infuocate: dalla parte inferiore del tunnel, che pare fatto a gradinata, e non è completamente chiusa, sorgono delle numerose e vivacissime fumarole; a destra il cratere minore, *D*, ancora slabbrato verso NW, con un respiro potente, come quello di una locomotiva, lancia col periodo di 1 a 2 secondi fumo bianco e frammenti incandescenti. Il cratere di mezzo *B* getta fumo nerissimo fino all'altezza di 20°, cioè a 250 m.; il cratere *N* erutta grandi masse di fumo grigio e lapilli con fracasso fortissimo e prolungato di rottami cadenti; il fumo arriva all'altezza di 30° cioè di 700 m. Tutte le bocche eruttano quasi incessantemente: da esse sorgono spesso dei turbini di fumo e cenere.

Notiamo che il lato orientale di M.te Nero è in linea retta colle bocche e colla cima della *Montagnola*.

A sinistra riconosciamo l'alto argine, stranamente frastagliato, dal quale il 2 agosto godemmo lo spettacolo indimenticabile della cascata di fuoco. Il Galvagno vi vuol ritornare, arrampicandosi per le lave recenti, scoscese, ed ancor scottanti, e ci reca un campione della lava di quel cratere. A levante del cono minore meridionale, *D*, è una specie di bacino o cratere aperto largamente a SE (Fig. 4) che ora dà solo fumo bianco e che certamente era una bocca di lava, attualmente estinta: lo stradino dice che fino a 4 o 5 giorni fa gettava fumo e lapillo. Più a SE si osserva una grande massa di lava incandescente che scorre da una specie di conca o fossa con basso argine, irregolare, e forma una corrente diretta pure a SE. Un poco più vicino, e ad un livello alquanto più basso, vi è un'altra bocca di lava simile alla detta, però meno incandescente. La corrente liquida che ne parte, si dirige presso a poco parallelamente all'altra; di fianco a queste colate fluenti cammina a stento e col caratteristico rumore delle tegole cadenti, la lava proveniente dal cratere *C*, superficialmente solidificata, da cui sbucano numerosissime fumarole.

Ci rechiamo quindi sulla cima meridionale di M.te Nero, donde si ha lo spettacolo della immensa distesa delle lave del 1886 e del 1892, che sembrano oscure fiumane ramificate, allaganti le sottoposte regioni. Il colore più oscuro delle colate dell'attuale eruzione le fa distinguere da quelle del 1886.

Scendiamo a piedi da quella cima di M.te Nero, attraversiamo sui muli un' altra volta la lava di ponente per il viottolo tracciato, ma poi lo lasciamo girando a NW, ed attraversiamo la prima colata, per andare più direttamente all'Osservatorio Etneo; ma il procedere sulla lava senza sentiero diviene così difficile per i nostri poveri animali, che ci conviene smontare ed andare innanzi alla meglio, saltando di blocco in blocco, aiutandoci col bastone ed anche colle mani; di quando in quando

io mi volgo indietro, per un sentimento di compassione, a vedere come se la cavano i muli, che veramente fanno sforzi enormi, miracoli di equilibrio, camminando senza cadere e senza ferirsi su quei massi ineguali, angolosi ed oscillanti. Infine arriviamo alla terra scoperta, tutti sani e salvi, uomini, muli, macchine e provviste; rimontiamo in sella e ci dirigiamo all' Osservatorio Etneo.

Alle 11 $^1/_2$ siamo ad un chilometro ad ovest delle bocche, delle quali vediamo la fila completa: notiamo fra i crateri *X* ed *A* una serie di fumarole bianche che sorgono da croste di lava: le due bocche, inferiore e superiore di *A*, dànno fumo grigio scarso; fra *A* e *B* sorge con detonazioni un'alta e sottile colonna di fumo oscuro: esce dalla nuova bocca *B'* (Tav. III, Fig. 3) formatasi il 17 agosto; il cratere *B* lancia fumo nero, il cratere *C* emette fumo nero da una bocca a nord e fumo giallastro da una bocca a sud, il cratere *D* erutta fumo rossiccio.

I coni *B* e *C* sono quasi fusi assieme in un solo monticello allungato, con una sella o depressione fra i due; il conetto *D* è più alto e più spiccato da *C* di quel che era prima.

Alle 12^h $^1/_2$, per la via dell' Osservatorio vediamo un' eruzione di fumo bianco dal cratere centrale. Alle 14^h arriviamo all'Osservatorio Etneo con tempo coperto, piovigginoso. I sismoscopii sono come furono lasciati il 12 agosto dal meccanico; il che vuol dire che da allora in poi non ebbe luogo alcuna scossa di terremoto; nessuna scossa neppure nella notte seguente.

All' alba del 20, a $4^h 50^m$, si parte per il cratere centrale, dirigendoci io e Galvagno per l'erto pendio meridionale, i Sig.ri Wallerant e Chaudeau per il lato di ponente.

Dal luogo dell' eruzione si innalza molto fumo bianco e grigio; a $5^h 20^m$, quando siamo a $^3/_4$ dell' altezza del gran cono, sorge il sole, rosso come al solito; alle $5^h 45^m$ il sole che ha varcato uno strato di nebbia alto 10°, forse dovuto all' eruzione, è già di color bianco. La parte superiore del cono è coperto da polvere e poltiglia, formata da cenere e sali diversi, delique-

scenti ed efflorescenti, in cui il piede affonda e scivola: lungo il pendio si incontrano molte fumarole calde.

A $6^h\ 0^m$ arriviamo sull'orlo: il termometro segna 5°,8; le varie tinte che per sublimazioni ed incrostazioni sulfuree e d'altra natura presenta il cratere dentro e fuori sono di un bellissimo effetto. L'orlo è rossastro, con una grande macchia gialla di zolfo presso la cima, a SW; nell'interno, dalla parte di ponente che è libera dal fumo, dominano le tinte giallastre e verdastre oscure, che noi vediamo solo a tratti, quando ce lo permette il fumo che, specialmente dalle fumarole a SE esce abbondante, sulfureo, soffocante; all'orlo di ponente vi sono delle fumarole con fumo discendente. Vediamo anche un cono avventizio aderente alla parete interna che guarda a SE, che però non emette fumo, è più alto di quello che vidi al 15 luglio 1891: forse crebbe per le eruzioni intercrateriche di scorie del giugno scorso: oppure in quella occasione si formò un nuovo cono avventizio più alto.

Ci avanziamo e scendiamo verso l'interno per la depressione dell'orlo SE, fino al precipizio a picco che la termina, ma il gran fumo soffocante ci caccia, prima che abbiamo potuto vedere meglio l'interno. Saliamo sulla parte più elevata dell'orlo a sud, per evitare il fumo e dominare meglio l'interno, ma neppure di là riusciamo a scorgere il fondo del cratere, e solo a tratto vediamo porzione delle pareti: dal fondo sale fumo grigio rossastro, denso, in grande quantità. Nessun rombo, nè altro rumore entro al cratere.

Alle $7^h\ 2^m$ si comincia a ritornare; a $7^h\ 49^m$ arriviamo a *Vulcarolo*, piccolo cratere che esiste da tempo immemorabile al piede del gran cono a 300 m. a NNE dell'Osservatorio; emette molto vapore acqueo, denso, bianco come al solito. Vi osserviamo il consueto, ma sempre attraente fenomeno dei *cerchi di Ulloa*. Una persona mettendosi sull'orlo del piccolo cratere, col sole alle spalle, vede la propria ombra colla testa contornata da un primo circolo od aureola col rosso all'interno e l'azzurro all'e-

sterno, e poi da un altro gran cerchio di circa 50° di raggio, che invece ha il rosso all' esterno e l' azzurro all' interno: come è noto questo è un fenomeno di diffrazione della luce nelle particelle sospese del fumo o della nebbia.

Alle $11^h 36^m$ si parte dall' Osservatorio per il *teatro della eruzione;* a $12^h 3^m$, essendo a ponente della Montagnola si sente forte puzzo di zolfo, proveniente dall'eruzione: il mulattiere dice che stamani, nel salire per recarci i muli, vi era forte puzzo di zolfo che *accupava* (soffocava). A $12^h 25^m$ arrivati a Tacca Albanelli, vediamo riattivata la colata che va a M.^{te} Concilio.

A $12^h 50^m$ al piede di Volta Girolamo osserviamo due fratture di cui una diretta NE-SW e l'altra, che parte dal mezzo della prima, si dirige verso sud con andamento tortuoso: nella prima frattura vi sono 8 fumarole: smuovendo le pietre, esce fumo da per tutto; le maggiori fumarole sono nell' incontro delle due fratture: nei crepacci e nell' arena umida si trova 60° di temperatura.

Alle $13^h \frac{1}{2}$ siamo alle bocche settentrionali dell' eruzione, le quali esalano poco fumo; a $13^h 55^m$ siamo a circa 20 m. a sud del viottolo dei nevaioli di Pedara che segue il piede sud della Montagnola, a circa 130 m. dalla nuova bocca N che ha forma di largo e basso cono regolare: stride continuamente come il vapore che esce dalla valvola di sicurezza di una locomotiva: emette fumo bianco abbondante, ma nessun proiettile; il lato sud del cratere è verdastro e ne escono moltissime fumarole vivaci: Galvagno si reca al suo piede occidentale, ma deve allontanarsi subito, tossendo violentemente per il fumo acido e soffocante che ne esce: vi ha udito un fortissimo rumore sotterraneo; e qualche rumore giunge anche a noi, con leggiero scuotimento del suolo. Secondo quello che ci riferì dopo il Capo delle guide etnee, questo cratere si calmò poi alle 5^h del giorno 20.

A $14^h 15^m$ siamo sulla linea delle bocche estinte, di cui ne vediamo 7: la fila è diretta a N 20° W.

A 14 $^1/_2$ odore di nova fradice, solforoso, forte, soffocante, che dà la tosse: rombi sotterranei e scuotimenti del suolo: ciò si ripete altre tre volte. Tutt'attorno ove siamo, a circa 250 m. a NW della bocca *N*, e fino a 300 m. da questa, vi è gran quantità di cenere, ed in gran numero, sparse sul suolo, grosse bombe e blocchi di lava lanciati dal cratere *N*: ve ne sono perfino di 1 $^1/_2$ m. di diametro: in un blocco rossastro, parallelepipedo irregolare, ancora caldo, introduciamo un filo di zinco in una fessura, solo fino alla profondità di 10 cm. ed il metallo si fonde alla punta: invece l' ottone resiste, ciò indica una temperatura superiore a 400°.

Grandi bombe sono piantate nel lapillo fino a 50 cm. di profondità; scorie e brandelli di lava, cadute sulla roccia vi si sono modellati sopra, altre hanno formato sul suolo piano delle stiacciate di più che un metro di diametro. Passiamo a 20 m. a sud della bocca *N* (Tav. III, Fig. 4) che da questo lato ha l' orlo elevato circa 30 m. sul terreno: su di questo vi sono altre bombe ovoidali grandissime: ne misuriamo una che ha il diametro maggiore di m. 1, 70. Nel solco o frattura, fortemente inclinato verso sud, fra i crateri *N* ed *A*, vi sono 12 e più fumarole vivacissime (Tav. V, Fig. 1).

A 16^h $^1/_2$ si parte per il lato di levante dell'apparato eruttivo. Passando ad est dei crateri *A* e *B* si avverte puzzo di zolfo; la bocca fra *A* e *B* (Tav. III, Fig. 3) è scavata nel piede di *B*: emette grandi ed altissime colonne di fumo oscuro: la falda di *B* rivolta a NE presenta moltissime fumarole. Alle 17^h 40^m siamo ad est del conetto *D*, che getta verso nord fumo e materiale incandescente; a sud del piede meridionale di *D* si è formata un'altura con bocca di lava, dal cui lato meridionale parte una piccola colata, che scende direttamente dall' elevazione del suolo su cui sorgono i crateri meridionali, e si dirige verso ENE (Fig. **b**); la superficie di questa lava è increspata, e tutta ricoperta di sublimazioni od efflorescenze saline bianche, che le dànno aspetto singolare, distinto da quello delle altre lave che

sono tutte oscure: verso sud ancora segue un cumulo di lava relativamente fredda ed oscura; poi nella direzione della cima meridionale di M.^{te} Nero si vede una grande bocca di lava incandescente *a*, di forma allungata verso SE, cui segue nella stessa direzione una colata pure incandescente: un' altra minore bocca di lava *b* è alquanto più in alto, ed a SW (*).

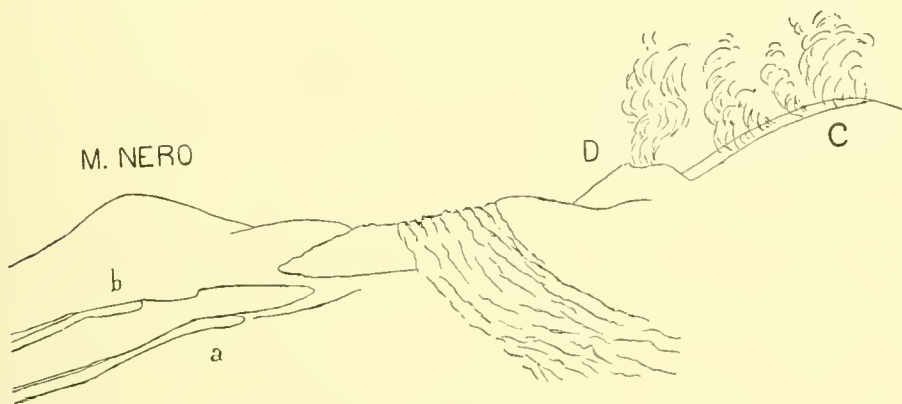



Fig. b: Parte meridionale dell'apparato eruttivo, vista da levante; 19 agosto 1892.

A 18^h $^1/_2$ siamo a *Casa dei Cervi:* a 300 m. nella direzione SW si vede la lava nuova incandescente, sovrapposta all' antica, e che si dirige verso SE, sotto l' altura maggiore di M.^{te} Pinitello. Il Dagalotto dei Cervi, ora invaso dalla lava, è poco importante ed i castagneti finora sono poco attaccati: tutta questa località a nord ed a sud della casa è ancora coperta di lapillo e cenere della eruzione del 1886.

A 18^h 40^m siamo a 1 $^1/_2$ km a NNE di Monte Albano: a nord di questo monte si vede il gran cumulo di lava recente, più alto del monte stesso, la quale penetrò anche nella conca-

(*) Si riproduce qui un abbozzo da me fatto sul luogo, perchè la fotografia eseguita non riuscì completamente, come si prevedeva per l' ora troppo avanzata e per le tinte nere del soggetto. Lo stesso dicasi per i seguenti bozzetti, fatti in surrogazione delle fotografie non riuscite, o che non si son potute fare.

vità del cratere, che però presentava a nord una sella bassa, e quindi offriva un accesso non difficile alla lava.

Più a nord vediamo M.^{te} Grosso circondato da due strati di lava recente, molto più alta a nord, ma non quanto il monte.

A $20^h \, ^1/_2$ siamo di ritorno a Nicolosi.

21 Agosto 1892. — A $6^h \, 40^m$ partiamo da Nicolosi, diretti al lato orientale dell'apparato eruttivo: a $6^h \, 55^m$ vediamo che tutte le bocche emettono molto fumo bianco o quasi; molto fumo dal cratere centrale; da $6^h \, 40^m$ a $7^h \, 50^m$ si odono rombi deboli; l'intervallo delle eruzioni della bocca B' è minore di ieri; a $9^h \, 0^m$ la bocca N erutta molto fumo nero.

A $9^h \, ^3/_4$ siamo a *Casa del Vescovo*, a 1700 m. dall'apparato eruttivo, che appare formato da 4 colline simili di forma, decrescenti di grandezza, addossate alquanto le une alle altre ed allineate da nord a sud: si vedono alte colonne di fumo che partono dalle bocche N, A, B', C'. A $10^h \, 0^m$, alla distanza di $^1/_2$ km. vediamo una grande esplosione della bocca B' con detonazione, come di cannone, scuotimento del suolo e colonna di fumo oscuro alta 30°, cioè 300 m., la quale poi lascia cadere cenere, formando una pioggia quasi continua.

Coll' ing. Giarrusso del Genio Civile, che viaggia con noi, si stima 50 m. il diametro della bocca N, l'altezza dell'orlo sul terreno a nord 25 m., quella a sud 65 m., il diametro della base 150 m.; questo cratere è cambiato sensibilmente da ieri: l'orlo è slabbrato verso nord, e da questo lato esce il materiale eruttato: lungo il pendio esterno ad W sorgono fumarole bianche, dense, attivissime.

A $13^h \, 6^m$ saliamo sui monti Calcarazzi e giriamo il ciglio NW per avvicinarci alla bocca N, che fa eruzioni di enormi masse di fumo nero densissimo, con esplosioni e scuotimenti del suolo.

A $14^h \, 14^m$ siamo a 700 m. N 10° E, della nuova bocca B': il fianco del cono B rivolto a nord è molto intaccato e si vede che

la nuova apertura *B'* viene di sotto a questo cratere. La bocca *B'* fa grandissime eruzioni di fumo grigio e nero, cenere e pietre nere e rosse incandescenti (Tav. V, Fig. 2) di cui è sparso tutto il suolo attorno: alle eruzioni segue per 5 a 6 minuti pioggia di cenere; le eruzioni producono continue frane delle pareti dei coni vicini *A* e *B*, specialmente del secondo.

Siccome abbiamo ripetutamente constatato che le eruzioni avvengono con un periodo di circa 6 minuti, in un intervallo ci avviciniamo alla bocca per vederne l'interno: io colla macchina fotografica a piede mi fermo a 60 m. di distanza e pongo l' orecchio contro il suolo per sentire l'arrivo dell'eruzione prossima, ed avvisare gli altri che avanzano ancora. Appena Galvagno è arrivato sull' orlo, vede salire la cima ristretta quasi acuminata di una densa colonna di fumo che indica una inaspettata eruzione: egli fugge rapidamente e così due carabinieri che l'avevano voluto seguire: avviene una gigantesca eruzione: io volgo lo sguardo in alto e vedo tutto il cielo occupato da una fitta pioggia di pietre: comprendo essere inutile alzarmi e fuggire; infatti pochi secondi dopo cominciano a cadere pietre tutt' attorno: Galvagno è colpito leggermente ad un braccio, un carabiniere ad una mano, un altro più seriamente alla testa: l' ingegnere Giarrusso che aveva l'ombrello aperto, riceve una pietra su di questo che resta sfondato, e così egli è toccato solo leggermente alla spalla, io e la macchina fotografica, diversamente da quanto pareva inevitabile, restiamo fortunatamente illesi. Le pietre eruttate giungevano ad un' altezza stimata 100 m.: una di esse colpendo il calcio del fucile di uno dei carabinieri, ne portò via una grossa scheggia.

A $16^h 10^m$ procediamo verso sud: il cratere *C* erutta sempre molte bombe, scorie e fumo: il sole visto attraverso di questo appare di un rosso intensissimo.

A $16^h \, ^1/_2$ arriviamo presso le bocche di lava: rivediamo, al piede meridionale del cratere *D*, il grande scoglio di lava singolarmente frastagliato, alto circa 3 m., poi la piccola eminenza

dal cui piede meridionale parte la piccola colata biancastra : passata anche questa, ci arrampichiamo su per l' ultima morena o cresta di rocce ammucchiate, arse, scottanti, che ci separa dal campo di lava, limitato a nord dal piede dei coni meridionali ed a sud da M.te Nero.

Le due bocche si presentano verso sud a piccola distanza sotto di noi, la più vicina *a* (Fig. **b**), ad una ventina di metri, o poco più, ha forma di conca regolare, diretta da NW a SE, ed è larga pochi metri ; ma la colata incandescente che ne parte dirigendosi a SE e poi a sud va di mano in mano allargandosi; l' altra bocca *b* è più lontana per un' altra trentina di metri, ed ha contorno complicato e rialzato, con direzione parallela alla prima; la lava scorre da esse bocche tranquillamente con mediocre velocità, ondulandosi ed increspandosi leggermente : i pezzi di scorie e di lava che vi gettiamo non vi affondano.

L' ing. Giarrusso che ha studiato bene queste bocche, dice che la prima all' origine è larga 7 m., e a 300 m. di corso la colata di lava che ne parte è larga 300 m.: la velocità è piccola, di solo 6 m. all'ora ; l'altra bocca è lontana dalla prima 25 m., è larga 25 m., e la lava ne sgorga colla velocità di 30 m. all'ora; le bocche di lava sono a circa 800 m. a SSE dal cratere *C*.

Non starò a descrivere l' effetto singolare, imponente, prodotto nella semi-oscurità del crepuscolo da quei due veri fiumi di fuoco, i quali animano col loro movimento il paesaggio deserto, ed orrido, formato da terreni e rupi nere, irte e brulle, stranamente conformate e contorte, su cui non avvi alcuna traccia nè di vegetazione, nè di vita.

Alle 18^h siamo a *Casa dei Cervi*. Il conducente dice che la nuova bocca a nord *N* è una delle prime estinte, la quale si è riattivata : egli fu sul luogo al 14 luglio e vide che dava solo fumo ; egli, come altri, non sa che quella primitiva bocca esiste ancora allo stato di grande fumarola a poca distanza, a ponente del nuovo cratere *N*.

A $18^h\,^1/_2$ piove lapillo; la lava inferiore, incandescente, lam-

bisce il dagalotto di castagneti che sta a 150 m. ad ovest della *Casa dei Cerri* e si dirige a M.te Piatto: l'altra lava alta è giunta sopra il pendio che domina la *Casa*, e la minaccia, come pure la cisterna ed il vicino dagalotto, per il forte pendio, che ne favorirà la discesa.

Ci si riferisce che la nuova colata di ponente è arrivata alle falde di M.te Ardicazzi ed invade il poco terreno lasciato libero dalle lave precedenti: si teme che questa colata passi fra i M.ti Ardicazzi e Concilio, e che secondata dal pendio, vada a produrre grandi devastazioni nei terreni a ponente dei detti monti.

Continua la pioggia di lapillo fino al nostro arrivo a Nicolosi a $20^h\ ^1/_2$.

22 Agosto. — A $6^h\ 25^m$ si vede da Nicolosi che le bocche dànno fumo bianco scarso: anche il cratere centrale fuma: il sole alto circa 15° è pallido, un po' gialliccio, e può fissarsi.

20 Ottobre.—A 14^h partenza da Nicolosi per la colata orientale di M.te Albano: lungo la via si odono rombi frequenti: a $16^h\ 20^m$ siamo arrivati in vista del fuoco: è la fronte della lava più avanzata a sud: i blocchi infuocati cadendo, si rompono in frantumi e polvere incandescente, che scorre lungo i pendii in modo da parere liquida; il colore irradiato è intensissimo, anche a 20 m. dalla colata; la fronte è alta 7 a 10 m.: avanza di 6 m. in 25 minuti, ossia di circa $14\ ^1/_2$ m. all'ora, la lava raffreddata ha colore rossastro, meno oscuro di quello delle colate di ponente.

Si ode un rumore generale, continuo, come di fiumana; scrosci e rumori come di tegole cadenti, separati da momenti di tregua e di silenzio. Questa lava scorre sopra lave antiche (del 1766), ed abbruciando il musco ed altre scarse pianticelle produce delle piccole fiammate.

22 Ottobre. — A 7^h si parte da Nicolosi; a 8^h siamo al passaggio della lava del 1892 sulla via a S. Leo: la punta occiden-

tale che ha oltrepassata la via per circa 150 m. nella direzione SW, è un poco meno avanzata verso sud dell'altra punta che è rimasta a levante della strada; stando su di questa si avverte un calore ancor sensibile dalla lava.

A $19^h \frac{1}{2}$ siamo su M.te Concilio: si vede che la colata di lava che esiste fra questo monte e M.te Ardicazzi passò prima fra M.te Ardicazzi e M.te Ardicazzello poi formò un cumulo di lava, quindi si divise in due rami: l'uno diretto a sud l'altro ad ovest fra M.te Concilio e M.te Rinazzi; la maggiore colata attorno M.te Concilio lo supera in altezza; M.te Ardicazzello è circondato; di M.te Guardiola emerge solo la cima.

La lava più recente di M.te Concilio è di tinta più rossa della precedente. Presso la fronte meridionale della lava vi sono numerose e grandi fumarole attive che producono sublimazioni ed incrostazioni bianche, gialle, verdi, rossicce: il loro fumo attualmente non è acido. Si sente odore d'arsiccio, causato dalle foglie cadute che il vento porta sulle fumarole, e vi abbruciano; ma stando sulle lave non si avverte alcun calore sensibile.

A mezzodì siamo in vista dell'apparato eruttivo: il cratere *N* fa grandi e frequentissime eruzioni di fumo grigio, la bocca estinta *F* emette fumo bianco, e fumo bianco erutta il cratere *C*; eruzioni di fumo rossastro escono dal nuovo cratere secondario *C'*, più raramente di fumo nero e scorie; il cratere *D* erutta fumo bianco, e talora scorie, quasi continuamente, con impulsi a circa un minuto secondo l'uno dall'altro.

A $13^h \frac{1}{2}$ siamo a 300 m. a sud della bocca *N* e della grande

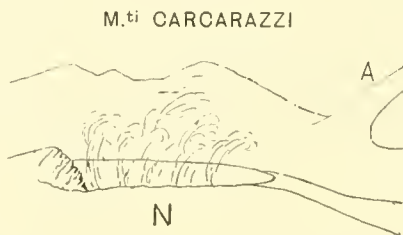



Fig. c: Cratere *N* visto da WNW al 22 ottobre 1892.

fumarola o bocca estinta *F* (Tav. V, Fig. 3). La bocca *X* ha l' orlo abbastanza regolare, (Fig. **c**) orizzontale, però a nord è franato, e vi è uno scoglio di lava frastagliata prominente nell' interno: ad ovest l' orlo è slabbrato a canale fino alla fumarola *F*, talchè pare che comunichi con essa. Le falde di *X* sono coperte di cenere biancastra: alla distanza di 50 m. da *X* si sente uscirne un rumore continuo, come di treno ferroviario.

Passiamo ad esaminare ad uno ad uno i coni dell' apparato eruttivo. Il cono *A* è di poco cambiato: però le due sue bocche, superiore ed inferiore, per le frane interne sono allargate e quasi confuse in una per la scomparsa dei sepimenti interni. Il cratere *B* (Fig. **d**) ha ancora forma conica; ma è largamente e profonda-

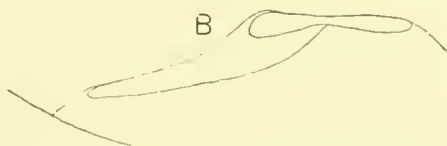



Fig. d: Cono *B*, visto da WNW al 22 ottobre 1892.

mente scavato nel fianco settentrionale, ove si è formata la bocca intermedia *B'*; da questa esce fumo bianco, non abbondante, stridente: si odono inoltre rumori continui deboli, come rullo. Il cono *C* (Fig. **e**) ha il suo orlo superiore a nord frastagliato da

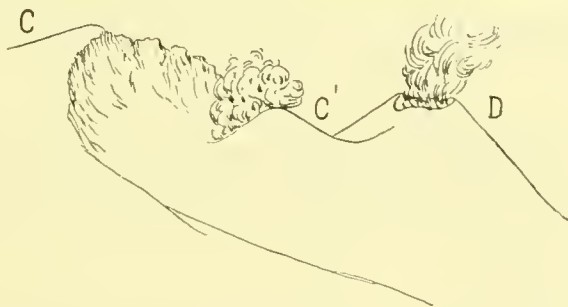



Fig. e: Nuovo cono secondario *C'* visto da ovest al 22 ottobre 1892.

frane: è di color rossastro con incrostazioni gialle e verdi all'orlo: il suo canale diretto a sud è tutto chiuso e colmato da detrito,

che forma una superficie inclinata continua, leggermente concava: non si riconosce più l' argine o morena di lava su cui siamo saliti il 1° Agosto. Ad ovest fino a 300 m. da questo cono si vedono blocchi eruttati colle dimensioni perfino di 2 m. (Tav. V, Fig. 4); il cratere *D* ha forma conica regolare, il suo piede a sud è molto sviluppato ed ha invaso quello del cratere *C*; fra il suo pendio NW e la cresta settentrionale di *C*, ed entro la cavità superiore di questo cratere si è formato un nuovo conetto *C'* (Fig. c) colla bocca rivolta a NW, il quale di quando in quando fa delle scariche di fumo giallastro e scorie.

Siamo saliti sull'orlo occidentale del cratere *C* con trepidazione per le eruzioni frequenti di scorie incandescenti del cono *D*, che ci domina: mentre disponiamo la macchina fotografica per ritrarre quell' interno così interessante, una mitragliata del nuovo cono *C'* ci obbliga alla ritirata, non senza però aver prima completato un rapido abbozzo; dopo di che scendiamo più che in fretta, dirigendoci a SE: incontriamo strisce o crostoni di lava piani come pezzi di un marciapiede; poi una serie di lastroni di lava accumulati quasi verticalmente, a libro o ventaglio: rammentano le tavole di ghiaccio della *débâcle* dei fiumi, e quella formazione e disposizione evidentemente deriva da cause analoghe, cioè il consolidamento superficiale e la spinta della corrente.

Passiamo poscia sui massi accumulati disordinatamente che coprono la bocca di lava a SE del cratere *D*; si riconosce ancora il canale che parte dal piede del detto cratere: vi è tuttora molto calore. Vediamo poi, più a SE, l'altra bocca pure ingombra e chiusa da massi stranamente accumulati, e di vario colore; più avanti ancora a SE, circa ad un chilometro, si scorge una terza bocca di lava.

Dobbiamo ripassare la colata di ponente, andando per il sentiero, e poi la 1ª colata diretta a M.te Faggi, insieme ai muli, perchè il mulattiere per errore li ha condotti fino al piede del cratere *C*; e quindi torniamo a Nicolosi.

25 Ottobre. — A 5^h si parte da Nicolosi per l' Osservatorio Etneo: per la via, mentre albeggia appena, vediamo la bocca di lava, la più vicina a SE del cratere *D*, lucidissima, di color rosso-bianco: anche la lava ai *Cerri* è assai luminosa; sopra la eruzione vi è una grande nube rossa, molto risplendente: levato il sole, si vede fumo grigio che esce dal cratere *N*. A $9^h\ 40^m$ siamo a *Casa del Bosco*: si ode il rumore dell' eruzione, come di caldaia in ebollizione; il cratere *N* emette una colonna di fumo grigio alta 9°, cioè 480 m.: ad ovest di esso vi sono due grandi fumarole attive *F*; dalla bocca *B'* esce fumo bianco, e molto ne esce pure dai crateri *C* e *D*. A mezzodì arriviamo all'Osservatorio: i tre sismoscopî sono a posto, indicando che dal 7 settembre in poi non vi è stata alcuna scossa di terremoto; a 17^h dall'apparato eruttivo esce fumo giallastro: sopra il luogo della eruzione si vede un grande cumulo di vapori, che pare formato di neve fioccosa, prodotto dalla forte condensazione dei vapori nell' atmosfera alta, fredda: dall'eruzione stessa si sente un rumore simile a quello del mare lontano, agitato.

26 Ottobre. — Al nascer del sole vi è solo un piccolo strato di nebbia e nuvolette che copre l' orizzonte marino: il sole nel sorgere vi produce tre immagini luminose irregolari, rosse, sovrapposte verticalmente; al mattino pochissimo fumo sull' eruzione. Dopo il tramonto bellissimo crepuscolo rosso, ordinario per forma e colorazione.

27 Ottobre. — Bell'aurora ordinaria: poche nebbie e nuvolette all' orizzonte marino; il sole nell' attraversarle produce due immagini sovrapposte verticalmente: poco fumo dall' eruzione, pochissimo dal cratere centrale, ma diretto all'Osservatorio, e che quindi produce puzzo di zolfo, molto molesto; a $18^h\ {}^1/_2$ fumo grigio nella parte settentrionale dell' eruzione; fumo bianco roseo sul resto, accresciuto; crepuscolo roseo bellissimo, ma ordinario.

28 Ottobre.—A $3^h \, ^1/_4$ forte puzzo di zolfo, soffocante, proveniente dal cratere centrale, portato dal vento violento di nord: bella aurora ordinaria: il sole sorge attraverso uno straterello di nebbia alto pochi minuti d'arco, sovrapposto all'orizzonte marino, il quale però si vede abbastanza distinto; a $10^h \, ^1/_2$ puzzo di zolfo, che viene da sud, cioè dall'eruzione; a $11^h \, ^1/_4$ partenza per il cratere centrale; a $12^h \, 7^m$ siamo a mezza altezza; cielo sereno sopra, campo di nubi sotto di noi, temperatura $+11°,3$, vento SE debolissimo: a $12^h \, 40^m$, arrivati all'orlo SE, dopo una salita difficile, scendiamo per un piano inclinato verso nord e verso l'interno, che presenta chiazze di neve: giungiamo fino all'orlo del precipizio a picco che lo termina, circa a 30 m. sotto l'orlo occidentale più alto.

L'interno ci si presenta in tutti i suoi particolari, perchè affatto sgombro di fumo e ben illuminato dal sole meridiano, e perfettamente calmo, cioè silenzioso; nella parte superiore ha la forma di anfiteatro per le stratificazioni orizzontali distinte che formano come delle gradinate; nella parte inferiore è fatto ad imbuto a pareti liscie, solo scavato verticalmente da molte frane concorrenti nel fondo; tutte le pareti specialmente superiori sono coperte da magnifiche incrostazioni verdi, gialle, aranciate: vi sono parecchie fumarole che dànno sottili colonne di fumo ascendente, denso, specialmente in quelle che escono dall'orlo di levante; scarsissime esalazioni solfuree, e quindi nessuna molestia, si odono solo alcuni rari scroscii nell'interno.

Nè al fondo, nè sulle pareti si vedono blocchi di roccia caduti, nè bombe, nè altro materiale sciolto. Il cono avventizio aderente alla parete interna che guarda SE è slabbrato e forse anche spaccato ad est: la sua bocca è a circa un terzo della profondità; emette tranquillamente fumo grigio poco abbondante: una colonna di fumo denso, grigio, più importante sale roteando dal fondo, poi si dilata aderendo al lato est del cono: pare che esca da una frattura che faccia seguito alla slabbratura del cono avventizio. Più ad est, e più in alto vi è un altro piccolo cra-

tere avventizio, pure aderente alla parete interna del cratere centrale: non emette fumo. A sinistra del cono maggiore avventizio cioè contro la parete interna del cratere centrale che guarda est vi è la *nicchia* che è una specie di galleria chiusa, poco profonda, certamente prodotta da una frana: le incrostazioni da cui è coperta la fanno parere dorata.

A $13^h 40^m$ saliamo sulla punta o corno più alto dell'orlo a sud per dominare meglio l' interno e vedere il fondo, che è chiuso da una superficie continua.

A $14^h 2^m$ siamo di ritorno alla depressione a SE: vi è la temperatura $+ 8°,0$; le pietre, che abbiamo fatte rotolare per la china esterna del cratere centrale, roteando e saltando arrivano fino al piede del cratere stesso, impiegandovi poco più di un minuto e producendo un rumore come se percorressero una via vuota di sotto.

A $14^h \, ^1/_4$ si comincia la discesa che da prima è difficilissima. Piantando nel terreno per 20 cm. il termometro nei punti donde vediamo uscire fumo, si ha l' indicazione di 70°.

A $15^h \, ^1/_4$ siamo di ritorno all'Osservatorio: sull'eruzione si vede ancora fumo bianco, fioccoso, e fumo giallastro.

29 Ottobre. — Bellissima aurora rosea; a $5^h 10^m$ dall' eruzione esce fumo rossiccio ed un rumore come di caldaia che bolle. Al nascer del sole ($6^h 18^m$) si osserva *il punto verde* e quindi sole rosso, poi aranciato, poi giallo, poi bianco, insomma tutti i fenomeni ordinari: anzi il sole appena spuntato, non può essere fissato, tanto è il suo splendore, ossia la trasparenza dell' aria.

A $10^h 25^m$ leggera scossa di terremoto: è caduto il pistillo del sismoscopio *Brassart*, ma non il dischetto del sismoscopio *Cecchi.*

A $13^h 30^m$ puzzo di zolfo con vento meridionale, quindi proveniente dall'eruzione, dove si vede fumo grigio: poco fumo dal cratere centrale.

A $14^h 30^m$ partenza dall' Osservatorio.

A $15^h\ ^1/_4$ siamo ad una frattura prodottasi al principio dell'eruzione: va da *Tacca Albanelli* a *Tacca Arena;* ha tracciato concavo verso SE, ed entro alla concavità il terreno è abbassato di 2 m. per l'estensione di 200 m.; nel centro dello sprofondamento vi è una cavità rotonda, cilindrica, quasi regolare, come pozzo, di 10 m. diametro e 5 m. di profondità.

A 16^h a *Volta Girolamo* si sente puzzo di zolfo e rumore come di mulino, dall'eruzione; le fumarole di *Volta Girolamo* sono molto attive.

A $16^h\ 6^m$ siamo poco lungi dal cratere *N* che è molto attivo e lancia grandi masse di fumo grigio, e qualche volta anche pietre, con molto rumore; piove fitta cenere; l'aria è molto torbida; il sole è giallo rossastro, e si può fissare senza pena: si sale sull'orlo settentrionale di *N*: il cratere è imponente: è divenuto ancora più grande; il fumo esce dalla parte meridionale che è divisa dalla settentrionale da una specie di tramezzo di rocce frastagliate, che parte dal punto NW dell'orlo. Giriamo al piede sud della scarpa e stimiamo l'altezza di questa 40 m.

Tutt'attorno il terreno è coperto da una abbondante eruzione di cenere biancastra, che rende irriconoscibili i luoghi da dove altre volte si era fotografato il cratere.

Il cratere *N* si è tanto esteso, che col suo piede ha raggiunto quello della bocca estinta o fumarola *F* (Tav. V, Fig. 3).

Procediamo verso altri crateri: arrivati presso la bocca *B'*, ad ore 17, siamo di nuovo avvolti da densa caligine: si ode un grande strepito; crediamo derivi dalla bocca *B'*; il cielo è rossiccio, torbido a nord, più chiaro a sud, ove pare vi sia un'area o bocca serena, azzurrognola: in altri momenti pare vi sia un circolo chiaro, allo zenit; sono effetti di uno strato di nebbia molto denso, ma basso, cioè di poco spessore. La caligine e l'oscurità ci impediscono di visitare gli altri crateri; e ritorniamo a Nicolosi.

Visite di A. Riccò all'apparato eruttivo dopo l' eruzione.

Queste visite sono state fatte per lo più di passaggio, sia nel recarci all' Osservatorio Etneo, sia nel fare il rilevamento delle lave: diamo quì concisamente i dati raccolti, relativi allo estinguersi dei residui dell' attività eruttiva ed alla degradazione dell' apparato eruttivo.

1 Marzo 1893.—A $10^h\,55^m$ ove la strada S. Leo è incontrata dalla lava del 1892, questa presenta delle efflorescenze saline bianche come neve; a $11^h\,10^m$ si vede fumo che esce da M.te Gemmellaro; a $11^h\,20^m$ la lava di grande spessore dietro M.te Concilio fuma ancora; a $12^h\,25^m$ a casa del Bosco cade nevischio (*graupel*); a $13^h\,20^m$ si nota che la colata a M.te Faggi ne ha oltrepassato l' asse di circa 150 m. nella direzione SSW: a $13^h\,20^m$ nevica. A $13^h\,55^m$ siamo alla grotta *Rifugio dei Pastori*: si osserva che la bocca *B'* ha un orlo o cono rilevato, distinto (Fig. **f**) forse

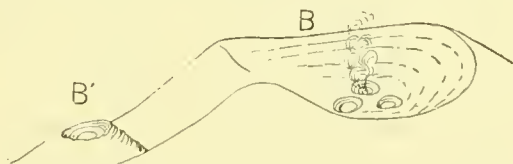



Fig. **f**: Bocca secondaria *B'* vista da W al 1 marzo 1893.

perchè il materiale che lo costituisce, incrostato e cementato da scorie recenti, ha resistito all'azione demolitrice degli atmosferili, meglio delle falde incoerenti dei coni vicini *A* e *B*; molto fumo dal cratere *N* e dalla vicina fumarola *F*, altre fumarole sulla costa meridionale della Montagnola; incrostazioni gialle sui coni *B* e *C*. A $14^h\,0^m$ ai *Grassorelli*, si smonta di sella, perchè i muli non possono andare oltre sulla neve; a $15^h\,10^m$ a M.te Castellazzo; tuoni da ponente, il cratere *N* dà fumo copioso, azzurrognolo.

2 Marzo 1893.—A $14^h\ 20^m$ scendendo dall'Osservatorio Etneo siamo ai *Grassorelli :* nevica; da questo punto si vede il cratere *N* molto sviluppato, *A* poco cambiato, *B'* molto distinto, *B* basso, largamente sventrato verso nord, *C* pure aperto verso nord, *C'* e *D* ben distinti ; niente fumo.

30 Aprile 1893 — A $9^h\ 40^m$ a *Volta Girolamo* si nota che dai crateri *N*, *A*, *B'* e dalla fumarola *F* esce fumo leggero ; si vedono fumarole anche sul fianco meridionale della Montagnola : molte incrostazioni sul cono *A* e più ancora su *B*, che è franato e slabbrato.

1 Maggio 1893.—A $11^h\ 0^m$ nebbia densissima : la fumarola *F* si è fatta grandissima : ha l' aspetto di un vero cratere vulcanico largo una trentina di metri, e molto profondo : una pietra per cadere al fondo impiega 3 secondi, il che dà 44 m. di profondità ; le bocche da cui esce il fumo sono in fondo al cratere; non si ode alcun rumore ; a levante vi sono altre fumarole, anche esse entro una grande escavazione o cratere, attiguo al primo. Il fumo che esce da queste bocche è denso e copioso, ma non ha alcun odore : pare sia puro vapor acqueo.

Il cratere *N* è molto cambiato : è slabbrato ed allargato verso sud dalle frane : la parte nord dell' orlo, che è una porzione interna del cratere, messa a scoperto dalle frane, ha la forma regolare di un segmento sferico cavo : è coperta da incrostazioni gialle : più a sud vi è una voragine enorme, a forma di imbuto irregolare, ripidissimo, profondissimo : una grossa pietra, che vi gettiamo dentro, vi produce rumore per 50 secondi ; ne esce continuamente fumo ; si stima il diametro della parte meridionale 150 m. ed il diametro totale N-S 200 m.

A $14^h\ 5^m$ nebbia e nubi : saliamo sul cratere *A* : vi sono tre grandi cavità coniche *in fila diretta al cratere N:* la più meridionale è doppia; vi è inoltre in fondo un canale diretto obliquamente in giù, verso sud ; le bocche sono coperte da incrosta-

zioni gialle; nessun indizio di attività, tranne due fumarole nelle due bocche più meridionali, che dànno sensibile calore; la sommità a sud è pure coperta da belle incrostazioni gialle e verdi. Guardando verso sud si domina e si vede perfettamente la bocca intermedia *B'* ed il cono *B*: la prima ci rivolge una bocca rotonda, come di pozzo diretto alquanto verso sud, colle pareti incrostate da scorie e sublimazioni giallo-rossastre: superiormente la bocca è slargata da frane. Il cratere *B* ha forma complessiva conica, abbastanza regolare, ma è profondamente e largamente scavato nella falda settentrionale, ov'è la bocca *B'*: il suo cratere è pressochè circolare, scavato ad imbuto, e piuttosto a scodella, e dalla sommità del cono *A* vi vediamo due bocche (delle tre che ha) e molte incrostazioni e sublimazioni giallastre, ma niente fumo. A $13^h\ {}^1/_2$ le nubi e le nebbie aumentano per modo da rendere impossibile continuare l' esame dello apparato eruttivo, e partiamo per Nicolosi.

21 Giugno 1893. — Nel passare si vede da lontano che nell'apparato eruttivo non vi è nulla di nuovo: poco fumo dal cratere *N*, e nulla dagli altri: fumarole attive fra *N* ed *A*.

28 Luglio 1893. — A $14^h\ 0^m$, passando lungo la fila dei M.si Silvestri, si vede che nell' apparato eruttivo solo il cratere *N* emette fumo.

6 Agosto 1893. — A $11^h\ 16^m$ scendendo per il Piano del Lago a circa $^1/_2$ km. a sud dell'Osservatorio Etneo si avvertono boati cupi, poco forti, provenienti dal cratere centrale, che emette molto e denso fumo; a $12^h\ {}^1/_4$ siamo a nord del cratere *N*, il quale getta molto fumo come anche le fumarole attive sulle falde meridionali della Montagnola a circa 400 m. a nord del cratere *N*: passando ad est del detto cratere si avverte puzzo di anidride solforosa; gli altri crateri del 1892 seno totalmente calmi. Essendoci fermati a Serra Pizzuta Calvarina, ove la lava del-

l' eruzione del 1892 forma un grande ammasso, a 14 $^1/_2$ vediamo una fumata del cratere *A*.

20 Settembre 1893. — A 15^h $^3/_4$ nel passare vediamo che nell'apparato eruttivo del 1892 solo il cratere *N* emette un po' di fumo.

10 Agosto 1894.—A 15^h $^1/_4$ nel salire all'Osservatorio Etneo si vede che il cratere *N* emette ancora fumo: su di esso e sulle fumarole *F* vi sono molte incrostazioni bianco-giallastre.

1 Settembre 1895. — A 15^h $^1/_2$ passando nel recarci all'Osservatorio Etneo, si osserva che il cratere *N* emette fumo azzurrognolo, assai abbondante: nulla gli altri.

30 Settembre 1896. — Il cratere *C* è squarciato e molto franato nell'interno: si vede ancora la specie di diga da cui precipitava la cascata di lava; sull' orlo superiore vi sono molte incrostazioni gialle e rosse, anche di zolfo: vi è sensibile calore: il termometro a contatto del suolo segna 35°. L'orlo è formato da un tufo aereo di cenere, abbastanza coerente. Si osserva una bocca di lava al piede di *C* la quale dopo essersi estinta si riattivò: è di forma irregolarmente ellittica col diametro maggiore di 12 m., il minore 4 $^1/_2$ m. la profondità attuale 7 m.: l'orlo nord è ripiegato verticalmente all' infuori, come da spinta interna.

Il cratere *D* ha forma di pozzo rotondo con pareti a picco; una pietra a cadere in fondo impiega 2^s, 8, il che darebbe la profondità di circa 38 m., maggiore dell' altezza del cono. Dall'orlo meridionale emana calore fortissimo; il piede di questo cono ha invaso il corso della lava che con forte pendenza usciva dal cratere *C*. Davanti a questo cono, a sud vi è un cumulo di lava che è quello uscito dal piede del cono *D* alla fine di settembre 1892.

30 Ottobre 1896. — La bocca del cratere *N* è grande circa come quella di *B*, minore di quella di *A* che però è molto allungata e divisa da sepimenti in ruina. Il cratere *N* è fatto ad imbuto profondissimo e ripidissimo: entro vi sono molte fumarole attive. Il terreno a nord del cratere *N* è quasi piano ed al livello dell' orlo settentrionale del detto cratere; più a nord ancora vi è un cumulo di materiali vulcanici antichi.

L'orlo più alto della fumarola *F* forma una cresta spiccata, con pendio ripido che guarda SE: vi sono delle fumarole scottanti.

L'orlo orientale di *A* è più alto dell'altro; il cratere è spaccato e franato, ancora più di quel che era prima.

La sella fra *B* e *C* è quasi alla stessa altezza dell' orlo o cresta occidentale di *C*, meno alta della orientale, rasenta l' altezza dell' orlo del cono *C*.

Il pendio dei coni ad est è più dolce e più esteso di quello ad ovest: dopo il piede ben netto dei coni vi è un piano inclinato che scende fino a grande distanza verso est, tutto coperto di cenere vulcanica recente, cioè dell' eruzione del 1892.

L' interno del cratere *B* ha forma regolare ad imbuto, però scavato verso nord fino a *B'*; nel fondo vi sono tre bocche rotonde: dalla orientale esce poco fumo incoloro.

Il cono *A* è alquanto ad ovest della linea di *B* e *C*.

I tre crateri *A*, *B*, *C*, sono di forma ovale, allungata circa nella direzione N–S: *A* e *B* hanno il vertice acuto verso nord, *C* è allungato a conca e canale verso sud.

L' apparato eruttivo e le lave sono stati visitati da me parecchie volte anche in seguito, ma le variazioni osservate si riferiscono piuttosto alla loro degradazione, causata dagli agenti atmosferici, anzichè a residui di attività.

Naturalmente anche al cratere centrale si sono ripetute le visite dopo il 1896, ed in esso si è notato, più che altro, un lavorio di demolizione, prodotto dalle frane; e ciò fino all'eruzione centrale dell'agosto 1899, che modificò sensibilmente l' interno del cratere medesimo.

Visite di S. Arcidiacono all'eruzione.

4 Settembre 1892.—Per incarico del sig. Direttore dell' Osservatorio di Catania ed Etneo, prof. A. Riccò, partii per Nicolosi con lo scopo di fare una breve escursione sul teatro eruttivo, spingendomi sino all'Osservatorio Etneo ed al sommo cratere centrale dell' Etna.

L' itinerario fu così stabilito: percorrere all' andata il campo eruttivo dal lato occidentale, ed al ritorno, dopo di avere visitato il cratere centrale etneo, percorrerlo dal lato orientale.

Partii da Nicolosi, accompagnato dal sig. Antonio Galvagno, custode dell' Osservatorio Etneo, nella mezzanotte tra il 5 ed il 6 del predetto mese di settembre, e verso le 4^h del mattino, giunsi sul cono settentrionale di M.^{te} Nero, a poche centinaia di metri dall' apparato eruttivo. Ancora l' alba non era spuntata, e col favore delle tenebre, da quel punto elevato si poteva osservare benissimo lo sgorgo abbondante di una estesa corrente di lava infuocata, che si spandeva sopra un piano dolcemente inclinato verso sud-est, dirigendosi al basso per le erte pendici dei *dagalotti dei Cervi*.

Da quel che si poteva vedere, anche con l' aiuto di un buon binocolo, sembrava che le bocche di fuoco principali fossero due. Il colpo d' occhio era veramente meraviglioso: la vista di un esteso campo mobile di lava, su cui si accavalcavano con vece continua ondate di lava incandescente, contornato a nord dalla imponente serie dei nuovi coni avventizii, a nord-est dall'aspra e selvaggia giogaia della Serra del Salifizio, ad est, circonfuso da un rado velo di nebbia indorata dalla nascente aurora, dal grandioso M.^{te} Serra Pizzuta Calvarina, era tal cosa da riempire l'animo di stupore e di ammirazione.

L' apparecchio eruttivo, tal quale a noi si mostrava dalla

cima settentrionale di M.^{te} Nero, è rappresentato dalla Fig. 1, Tav. VI. Si vede in *e* una bocca di fuoco spenta, ridotta allo stato di emanazione, la quale, dalle ore 14 del 27 agosto, fino alla sera del 29, mandò fuori una colata di lava (ancora calda al tempo della nostra visita) che lambendo la base orientale del predetto monte, andò a confondersi in basso col grosso della corrente principale.

Si vede poi a sud il cono eruttivo *D*, il più piccolo, di forma regolare; esso al principio dell' eruzione mandò fuori lava e fumo, indi solo colonne di fumo bianco e brandelli di lava incandescente, spesso in forma di bombe; funzionava come un enorme camino per dare sfogo ai prodotti gassosi del grande focolaio vulcanico sottostante. In *C* si riscontra il cono successivo, verso nord, un po' più elevato del precedente, con i bordi del cratere irregolari e con una profonda squarciatura sul fianco sud, per la quale si poteva osservare lo interno della voragine. Trovavasi allo stato di solfatara, con le pareti tapezzate da sublimazioni che facevano un bello effetto alla vista coi loro vivi e svariati colori.

In *B* ed in *A* si hanno altri due coni eruttivi; essi si somigliano molto nel profilo, differiscono poco in mole ed altezza, entrambi hanno la bocca craterigena spostata verso nord-ovest rispetto all'asse e presentano sul lato opposto una gibosità su cui risiedono i loro punti culminanti. Anch'essi si trovano in calma, con le pareti interne tapezzate da sublimazioni di svariati colori.

Dietro la predetta serie di coni avventizii, si spalanca una grande voragine, un cratere di esplosione, comparso nella notte tra l' 11 ed il 12 dello scorso agosto e che si è distinto con la lettera *X* nella II parte di questa memoria, Diario dell'Eruzione del 1892, esso si rivela nella fig. 1 mercè di una colonna di fumo grigio *f*.

Circa le 9^h, 14^m lasciammo la cima settentrionale di M.^{te} Nero, attraversammo con grave disagio la estesa corrente di lava di ponente, costeggiammo la serie dei nuovi crateri e ci av-

vicinammo alla predetta voragine *N*, che giace proprio alla base della Montagnola. Nel frattempo le colonne di fumo che lentamente si innalzavano da essa, si trasformavano a poco a poco, in violenti eruzioni, il cui prodotto era rappresentato da colossali pini di fumo grigio, frammisto ad abbondante materiale frammentario di ogni grossezza, dalla sabbia alle grossissime bombe di più che un metro cubo di volume; alle 10^h circa, eravamo già alla distanza di circa m. 300, in presenza di questo cratere in piena attività. Il succedersi continuo delle sue eruzioni, l'alto fragore di cui venivano accompagnate, ci offerivano veramente uno spettacolo assai interessante.

Riproduciamo una fotografia (Tav. VI, fig. 2) di questa bocca, la quale essendo comparsa da 26 giorni, non aveva avuto ancora il tempo di accumulare attorno a sè tanto materiale da costituire una notevole prominenza sul terreno circostante. In questa fotografia predomina la colonna del fumo eruttivo, che grigia e con estrema violenza si innalza in aria; dietro si disegna il profilo della Montagnola ed a sinistra si vede un tratto del pendio settentrionale del 1° cono avventizio *A*.

Si procedette oltre, verso l'alto; si lasciò ad est la predetta bocca *N*, e ci avviammo direttamente verso l' Osservatorio Etneo, dove giungemmo alle 14^h, con un vento di ponente freddo ed impetuoso; nel salire, in contrada Volta di Girolamo abbiamo visto un debole fumaiuolo, che poi al ritorno non abbiamo più trovato.

Alle $7^h\ 20^m$ del giorno 7 intraprendemmo la salita del cono terminale dell' Etna; essa fu compiuta senza alcuno incidente in un' ora e dieci minuti dal lato sud.

L' interno del ceatere centrale etneo, dopo la grandiosa ultima esplosione delle $22^h\ 30^m$ dell'8 luglio, si era completamente trasformato. Prima di quel tempo, e durante le diverse fasi di attività attraversate dopo l' eruzione del 1886, aveva assunto la forma caratteristica di un gigantesco imbuto, con le scarpate più o meno praticabili e con la bocca del camino vulcanico in fon-

do, ridotta a minime proporzioni, perchè in gran parte obliterata dal materiale franato, e dalla quale si compivano i principali fenomeni eruttivi centrali. Con la esplosione della notte dell' 8 luglio 1892, era saltata in aria la impalcatura del cratere centrale con tutto il materiale frammentario incoerente, e la grandiosa cavità craterigena aveva preso la forma attuale di una immensa caldaia con le pareti tagliate a picco, dell' altezza di più che 60 metri, sulle quali si vedevano innumerevoli strati orizzontali di conglomerati, costituiti da sabbie, lapilli ed altro materiale minuto, variamente colorate da sublimazioni di cloruro di sodio, cloruro d' ammonio, cloruro di ferro, cloruro di rame, zolfo ecc. ecc. il tutto avvolto in turbini di fumo bianco acidissimo, esalante dal fondo della voragine e dagli innumerevoli fumaiuoli facentesi strada attraverso di esse.

Il vento di ponente, che lassù spirava impetuoso, le emanazioni acide del sottoposto cratere centrale etneo, ci rendevano quasi impossibile, per lo meno molto fastidiosa, la permanenza sulla cima dell' Etna, epperò, nostro malgrado, abbiamo dovuto fare ritorno all' Osservatorio Etneo. Ivi facemmo i preparativi per la partenza, verso l' apparato eruttivo eccentrico e Nicolosi; alle 11^h eravamo già in marcia, diretti verso sud-est, e lambendo la base orientale della collina della Torre del Filosofo, raggiungemmo il ciglio del Piano del Lago, da cui si dominava tutta la immensa Valle del Bove.

Disgraziatamente in quell' ora la nebbia fitta riempiva quella vasta e profonda depressione, di modo che dovemmo rinunciare al grandioso spettacolo della vista della Valle del Bove a volo d' uccello.

Scendemmo verso la Montagnola e piegando un po' a sud-ovest, toccammo il bordo ovest dello *Cisternazza*.

Questa grandiosa voragine non è altro che una bocca eruttiva spalancatasi durante l' eruzione del marzo del 1792, cioè un secolo fa; è di forma presso che circolare, del diametro di circa m. 150.

Non presenta attorno ai suoi bordi alcuna eminenza perchè in sul principio della sua comparsa mancò l'attività eruttiva nella proiezione di sabbia, lapilli, scorie, brandelli di lava antica o coeva ed altro materiale frammentario.

Questa voragine ha una grande analogia con quella apertasi nella notte fra l'11 ed il 12 agosto 1892, proprio alla base della Montagnola e che noi abbiamo indicato con la lettera *N*; entrambe ripetono la loro origine ad una violenta esplosione prodotta dai gas racchiusi ad altissima tensione nell'interno della crosta terrestre, ed occupano i limiti estremi superiori dell'apparato eruttivo; se non che la bocca di esplosione dell'odierna eruzione è di proporzioni più modeste, ma in compenso fu molto più attiva di quella comparsa nel 1792, tanto che con le sue numerosissime e poderose eruzioni *vulcaniane* potè costituirsi attorno un cono assai depresso.

Dalla *Cisternazza* ci dirigemmo per il *Castello del Piano del Lago*: il ciglio meridionale di quell'esteso altipiano che si trova in cima dell'Etna, e di là, prendemmo la china per la *Tacca degli Albanelli*.

A cominciare da questa località, abbiamo trovato traccie evidenti di fratture, dislocamenti ed anche sprofondamenti del suolo. Constatammo da principio la esistenza di numerose buche piuttosto piccole al *Castello del Piano del Lago*, ordinate sopra un allineamento che scendeva per la *Tacca della Neve* agli Albanelli; ivi trovammo una frattura che scendendo dal di sopra della predetta *Tacca della Neve*, andava verso sud-est a mettere capo in uno sprofondamento in forma di pozzo, con la sezione circolare del diametro di circa m. 9 per altrettanto di altezza; al fondo, verso nord, questa piccola voragine s'inabissava nell'interno della montagna.

Da questo sprofondamento la frattura prosegue ancora verso sud, dirigendosi per la regione superiore della *Tacca della Rena* e per *Volta di Girolamo*.

A *Volta di Girolamo* siamo già nelle vicinanze dell'odierno

apparato eruttivo, ed ivi son tante le fratture e tale lo sconvolgimento del suolo, che sarebbe stata un' impresa ben difficile il volercisi raccapezzare.

Dall' alto di una ripida scarpata presi una fotografia (vedi parte II, tavola III, fig. 2) dell' apparato eruttivo, visto da NW. In essa campeggia il cono *A*, il più elevato della serie, con la sua grandiosa cavità craterigena, divisa da alti tramezzi in quattro voragini; indi si vede il 3° cono *B*, di proporzioni più modeste del precedente; dopo di questo, si vede appena il fianco occidentale del cono *C*, e dietro di esso resta il cono *D*, il quale si rivela per un debole pennacchio di fumo bianco; verso il limite estremo di destra della figura, si osserva la cima settentrionale di M.te Nero con la grande corrente lavica di ponente impietrita. Del 1° cono a nord *N*, non si vede, a sinistra della figura, che una debole e rada colonna di fumo grigiastro, essendo rientrato nel momento della nostra visita, in una calma relativa. La predetta fotografia completa quella presa dalla cima settentrionale di M.te Nero (Tav. VI, fig. 1,).

Procedendo oltre, mi diressi verso l' apparato eruttivo per esaminarlo più da vicino; feci il giro, in compagnia del custode Galvagno, dell'orlo del cratere *N*, or ora nominato, e potemmo costatare che esso era in calma, come si disse; ma dal suo interno venivano fuori tranquillamente delle esalazioni acidissime di anidride solforosa ed un alto fragore come di mare in tempesta.

Sceso il breve declivio orientale di questo cono, ci affacciammo dall' orlo settentrionale del cono *A*.

Quì ci si parò dinanzi una vista veramente meravigliosa; avevamo dinanzi a noi spalancate quattro grandiose voragini, allineate presso a poco da nord a sud e mano mano, coi bordi più elevati, fino a raggiungere la considerevole altezza di più che m. 100, separate l' una dall' altra da colossali muraglioni che anch'essi, grado grado, si spingevano in alto a guisa di una gigantesca gradinata (Tav. VI, fig. 3). Le pareti interne di que-

ste voragini erano vagamente tapezzate da sublimazioni dai vivi colori del giallo cedrino dello zolfo, del verde di alcuni sali di rame, del giallo rossiccio del cloruro di ferro, del bianco niveo del cloruro di sodio e del sale ammoniaco; il tutto poi, come in un immenso circo, era abbracciato dai fianchi ancora caldi del monte.

Il magnifico colpo d'occhio che ci si presentava dinnanzi, la calma quasi assoluta in cui giaceva questo cono avventizio, ci invogliò a tentarne la salita, la quale fu compiuta in breve tempo, senza alcuna seria difficoltà; noi per i primi abbiamo calcato la sua intatta cima. Nel discendere, lungo il ripido fianco di SE, ne abbiamo misurato la lunghezza, la quale moltiplicata per il seno dell'angolo di naturale pendìo con cui si dispose il materiale eruttato costituente i fianchi dol monte (circa 35°), ci diede un'altezza di m. 114 sul terreno circostante.

Compiuta la discesa del cono *A*, ci spingemmo verso il basso sul lato di levante dell'apparato eruttivo e giungemmo alla estremità meridionale della serie dei nuovi coni; c'inoltrammo fra le lave recenti, ancora calde, per avvicinarci, quanto più era possibile, alla zona di terreno ove si aprivano le bocche di efflusso delle lave. Dopo breve, ma faticosissimo cammino, circa m. 300, verso le $15^h, 30^m$ giungemmo dinanzi a due bocche di fuoco: una più alta, relativamente piccola, larga al più 2 m. la quale dava una corrente lavica che si avanzava lentamente in mezzo a due argini rilevati sul piano generale del suolo circostante, costituiti dallo accumulo di materiale frammentario solidificatosi alla superficie e mano mano depositato ai fianchi di essa corrente, come avviene per le morene laterali dei ghiacciai; l'altra, più bassa, una ventina di metri più a sud, larga, circa 4 m. assai più attiva, dava una corrente di lava colla velocità di quasi mezzo metro al minuto secondo. A questa bocca di fuoco assegnando una sezione di 16 mq. doveva dare, con molta probabilità, 8 mc. di lava al minuto secondo, 480 mc. al minuto primo, 28,800 mc. in un'ora; 691200 mc.

in 24^h. Si noti che noi abbiamo viste bocche di fuoco, già spente, assai più larghe di questa, epperò di una maggior portata ; da ciò si potrà arguire facilmente, tenendo calcolo anche della lunga durata dell' eruzione (giorni 174) lo enorme volume di materiale venuto fuori dalle visceri del nostro grande vulcano.

Noi potemmo accostare questa bocca di fuoco (Tav. VI figura 4) fino alla distanza di 5 m. circa e quantunque ci fossimo posti con le spalle contro al vento di ponente, che allora spirava, pure il calore irradiato da tutta quella massa incandescente era così intenso da non potersi a lungo tollerare.

La lava *c* uscendo dalla bocca di fuoco *b*, aveva una consistenza vischiosa, che si può benissimo paragonare a quella del miele : produceva dei sibili , degli scoppiettii continui per gas che si sprigionavano dalla sua massa ; immediatamente si ricopriva di uno straterello di scorie , che veniva subito rotto in mille pezzi e rigettati, mano mano ai lati della corrente ; quei frantumi di lava solidificata accumulati, a poco a poco, e poi cementati dalla lava medesima ancora fluida, costituivano degli argini entro i quali la corrente nel primo breve suo tratto conteneva tutto il suo materiale fluente.

Osservammo molte di queste bocche di fuoco spente, rimaste a nudo, per manco di materiale fluido incandescente ; si vedeva la voragine spalancata esalante intenso calore e masse più o meno considerevoli di vapori acidi di diversa natura ; per un tratto , verso il punto più depresso, i suoi bordi erano rotti e si prolungavano in basso in due muraglie , qualche volta alte fino a 2 m. presentando l' aspetto di una delle nostre strade di campagna fiancheggiate da muri a secco di pietrame vulcanico.

La corrente di lava *c*, di cui sopra è parola, per una ventina di metri scorreva sopra un piano dolcemente inclinato , conservando una larghezza media di circa 4 m.; dopo scendeva lungo il pendìo di una ripida discesa, espandendosi a ventaglio , allagando il piano sottostante.

Per quante ricerche si siano fatte in quella ristretta e pe-

ricolosa zona di terreno, non riuscimmo a trovare altre bocche di fuoco attive, di modo che si vedeva a chiare note che anche l' efflusso lavico nel tempo della nostra visita, era in grande decremento.

Essendosi l' ora fatta tarda, nostro malgrado, abbiamo dovuto lasciare quella scena singolare e muovere verso Nicolosi.

8 settembre, a 5^h, 30^m ci mettemmo nuovamente in cammino per raggiungere dal lato di levante i *Dagalotti dei Cerri*, allora campo di distruzione dell' eruzione in corso, e così visitare nuovamente le bocche di fuoco che lasciammo ieri sera. Lungo la via, ad oriente di M.^{te} Albano, incontrammo una corrente di lava piuttosto attiva, con la fronte larga 10 m. circa che si avanzava colla velocità media di quasi 12 m. all'ora, su un terreno inegnale, scabbro, a pendìo risentito, costituito dalle antiche lave del 1766, venute fuori dalle *Boccherelle del fuoco*, in gran parte egnagliate da un grosso strato di sabbia nera piovuta nella eruzione del 1886. Questa corrente era la più bassa fra quelle allora esistenti, molte altre rigavano il ripido pendìo dei *Dagalotti dei Cerri*, incendiando e distruggendo i floridi castagneti che ivi esistevano.

Verso le 8^h, 45^m guadagnammo la cima di M.^{te} Albano; di là abbiamo fatto una fotografia degli enormi accumuli di lava verificatisi attorno M.^{te} Grosso, il quale in gran parte rimase seppellito in mezzo ad esse; e di quelle accatastate a nord di detto M.^{te} Albano; dopo circa tre ore di lungo e faticoso cammino, a 13^h riguadagnammo la località compresa fra la base settentrionale Monte Nero e quella meridionale del cono avventizio *D*, ove si aprivano le due bocche di fuoco visitate ieri. Una di esse, la più alta, era già spenta, l' altra di cui sopra ci siamo a lungo occupati, era presso a poco nelle medesime condizioni del giorno precedente e per averne un ricordo, abbiamo fatto di esso una fotografia (fig. 4, Tav. VI) dalla parte di ponente, ad una distanza di circa 30 m.

Fatto ciò, non senza qualche esitazione, ci dirigemmo verso

ponente per raggiungere M.te Nero, attraversando la estesa corrente lavica di levante, sulla quale trovavasi sovrapposta una altra colata, venuta fuori nei giorni 27-29 agosto dalla bocca *e* fig. 1, Tav. VI. Quasi nel mezzo di questa corrente trovammo una bocca di fuoco spenta, accessibile, sormontata da un accumulo di lava scoriacea di forma grossolanamente conica, sventrato sul lato sud, prolungandosi i bordi della sventratura in avanti a guisa di due argini di altezze grado grado più piccole fino a morire alla superficie del suolo. Questa bocca di fuoco, dopo di avere dato il suo contributo di lava fluida incandescente, diede degli sbuffi di cenere bianco-gialliccia che asperse i suoi fianchi e una piccola porzione del terreno circostante.

Attraversammo il resto di quella zona di terreno, ove da un momento all'altro, nel periodo di maggiore attività della fase di deiezione lavica, comparivano e scomparivano le bocche di fuoco ed ove il terreno si vedeva frastagliato in tutti i sensi da fessure e crepacci, dai quali venivano fuori getti di vapori ad alta tensione, producendo dei sibili, lasciando inoltre vedere nel loro fondo la viva lava, il tutto incrostato da sublimazioni variopinte che facevano un singolare contrasto col nero arsiccio della lava recente solidificata. Verso le $14^h, 30^m$ ci riducemmo sul fianco orientale del cono nord di M.te Nero, sullo stesso punto in cui passammo le prime ore del giorno 6 settembre.

Alle 15^h abbandonammo la cima di M.te Nero e dopo di avere attraversato a piedi, per circa 20 minuti, la estesa corrente di lava di ponente, ci dirigemmo alla *Casa del Bosco*, dove trovati i muli, facemmo ritorno a Nicolosi.

Sulle opposte variazioni di resistenza dei coherer a perossido di piombo per influenza delle onde elettriche

Memoria del Prof. ERNESTO DRAGO (1)

1. Nel 1900 il Branly (2) pubblicò una memoria, nella quale espose i risultati di alcune sue ricerche sull' accrescimento di resistenza dei coherer a PbO^2 per azione delle onde elettriche—Egli affermò come le sue esperienze lo avevano condotto nell' opinione che l' accrescimento di resistenza dei detti coherer, dipende, al pari delle diminuzioni da uno stato fisico della membrana isolante interposta fra le particelle. Aschkinass (3) cerca di ricondurre il comportamento del PbO^2 a quello dei contatti umidi di conduttori metallici, i quali sotto l' influenza delle onde elettriche aumentano di resistenza.

In una mia precedente memoria (4) ho mostrato come i coherer a PbO^2 ed a CuS manifestino in certi casi delle diminuzioni di resistenza sotto l' influenza delle onde elettriche.

In seguito ho voluto studiare con maggiore accuratezza tale fenomeno da me constatato per i coherer a PbO^2, e nel contem-

(1) Lavoro eseguito nell' Istituto fisico della R. Università di Catania diretto dal Prof. G. P. Grimaldi.

(2) Comptes Rendus. Tomo 130-1900 p. 1069.

(3) Wied. Ann. 1899. Band. 67, p. 842.

(4) Atti Acc. Gioenia di Catania Serie 4ª Vol. XV.

po ho cercato di indagare anche la causa del noto aumento di resistenza dei detti coherer per l'influenza delle onde elettriche.

La disposizione sperimentale messa in pratica è stata la seguente.

Nel circuito di una pila termoelettrica o di tre elementi normali Raoult, erano inseriti il coherer, un galvanometro a grande resistenza coi rocchetti in serie, astatizzato con la durata d'oscillazione di 10^s, ed un interruttore a mercurio. Tutto era convenientemente isolato dal suolo, e nella prima serie di ricerche eseguite con la pila termoelettrica, con un coherer formato da due striscie di stagnola incollate sopra una lastra di vetro a 3^{mm} circa di distanza l'una dall'altra, e con le onde elettriche prodotte da una macchina Wimshurst, vennero confermati i risultati di cui ho fatto cenno nel principio del presente lavoro. Rimanendo costante la distanza fra le sferette dello spinterometro della macchina ed il coherer, le scariche intense della medesima coi condensatori facevano aumentare la resistenza elettrica del coherer, mentre le scariche deboli della macchina senza condensatori facevano diminuire la detta resistenza. Identico comportamento manifestava il coherer se la differenza di potenziale ai suoi estremi si faceva crescere gradatamente sino ad un massimo, che era raggiunto inserendo al posto della pila termoelettrica i tre elementi Raoult.

Esame microscopico.

2. Dopo tali esperienze in me si destò subito la curiosità di analizzare intimamente il fenomeno della opposta variazione di resistenza dei coherer a PbO^2 tenuto specialmente presente che detta sostanza non aveva mai svelato delle diminuzioni di resistenza a nessuno sperimentatore, e che anzi di tal fatto molti si sono avvalsi per attaccare la teoria di Lodge.

Costrussi allora un coherer stratiforme con una lunga stri-

scia di stagnola incollata sopra un portaoggetti da microscopio e provvista nel centro di una fenditura della larghezza di circa 1^{mm}.

Tale coherer venne posto sul tavolino di un microscopio di cui ordinariamente si adoperava l' ingrandimento di 80 diametri, che permetteva di osservare nettamente l' intervallo fra gli elettrodi di stagnola. L' ingrandimento di 120 diametri era soltanto adoperato quando si voleva osservare ciò che accadeva in una porzione speciale del detto intervallo presa in esame. Fra gli elettrodi di stagnola e sotto il campo del microscopio io mettevo una piccolissima quantità di polvere di PbO^2 puro, e poi fra i medesimi per mezzo di un ago sottile da cucire costruivo dei ponti di particelle di PbO^2. Il microscopio era isolato dal banco di osservazione per mezzo di un blocco di paraffina, ed analogamente per mezzo di una lastrina d' ebanite forata nel centro era isolato il coherer dal tavolino del microscopio.

Le prime esperienze si fecero, come ho già detto, costruendo dei ponti conduttori di PbO^2, ed il galvanometro con la deviazione del suo sistema astatico, letta al solito col metodo del cannocchiale e scala, accusava la continuità dei contatti delle particelle di PbO^2.

Collegando direttamente un polo del secondario di un piccolo rocchetto di Ruhmkorff, messo in azione da alcuni elementi Cupron, con un estremo del coherer si osservavano violenti movimenti e scintilline sotto il campo del microscopio. La polvere di PbO^2 veniva proiettata fuori dall' intervallo fra gli elettrodi ed il campo così veniva sgombrato con un solco per lo più parallelo alla fenditura. I ponti erano evidentemente distrutti e la deviazione del galvanometro si annullava. Risultati perfettamente identici si ottennero servendosi della macchina Wimshurst invece del rocchetto. Se però si metteva in azione il rocchetto con un solo elemento Cupron, non si notavano più dei movimenti sensibili nella polvere e l' aumento di deviazione del galvanometro rendeva palese la diminuzione di resistenza del coherer.

Do alcuni esempî di numerosissime esperienze eseguite sul riguardo.

Deviazione iniziale del galvanometro prima di eccitare il rocchetto	*Deviazione del galvanometro dopo l'azione del rocchetto sulla polvere di PbO^2.*
31^d	95^d
80^d	140^d
70^d	120^d (1)
140^d	180^d
40^d	110^d
80^d	110^d
15^d	26^d
35^d	57^d
10^d	61^d (2)
50^d	95^d
25^d	75^d
11^d	55^d
0^d	25^d

Gli scuotimenti facevano aumentare, come è noto, la resistenza del coherer.

Se io desideravo un' azione più lenta del rocchetto talvolta mettevo fra i morsetti dell' elemento Cupron una conveniente derivazione.

Senza osservare nel seguito delle ricerche la deviazione del galvanometro io riuscivo a distinguere con la sola osservazione al microscopio, i casi in cui la polvere diminuiva di resistenza e quelli in cui aumentava. Nei primi non si osservavano movimenti bruschi delle particelle di PbO^2 ma abbastanza lenti, mentre negli altri, oltre ai movimenti rapidi, si avvertiva un crepitio particolare derivante dalle scariche fra gli elettrodi o fra le particelle della polvere del coherer. L'osservazione successiva

(1) Tale valore della deviazione si ottenne a 10^h. Facendo delle osservazioni a 16^h si trovò ridotto a 102^d.

(2) 61^d a 10^h e 66 a 15^h. Ciò prova che le resistenze del coherer si mantenevano relativamente costanti per molto tempo, e le variazioni brusche osservate dipendevano realmente dall' azione del rocchetto e non da variazioni accidentali della resistenza del coherer.

della deviazione del galvanometro confermava le mie previsioni.

Invece di communicare delle cariche elettriche direttamente al coherer pensai primieramente di communicarle attraverso l'aria per induzione.

Perciò costrussi uno spinterometro a punte d'acciaio, le quali potevano essere collegate con i poli del secondario di Ruhmkorff da un lato, e dall'altro si mettevano sotto il campo del microscopio ad una determinata distanza dal coherer. La distanza esplosiva come anche la distanza fra il coherer e le punte dello spinterometro potevano variarsi a piacere.

Si costruivano allora dei ponti di PbO^2, interrotti in varî punti in modo da non avere una deviazione del galvanometro, e si cominciava ad eccitare il rocchetto con un elemento Cupron, mettendo le punte alla distanza di 1,5 - 2 mm. circa dal coherer e poco distanti tra loro ($^1/_2$ o 1 mm. circa).

Facendo allora aumentare la distanza esplosiva sino a 2 o 3 mm. circa o anche più, ed avvicinando nel contempo le punte al coherer, si notavano nella polvere regolarissimi movimenti dovuti evidentemente alla polarizzazione delle particelle di PbO^2. Le interruzioni dei ponti si chiudevano, le particelle di PbO^2 si suddividevano in minutissimi granelli di polvere, i quali congiunti tra loro presentavano ordinati movimenti vermiformi.

Contemporaneamente l'osservazione al galvanometro mostrava come la deviazione aumentasse e spessissimo l'immagine della scala uscisse fuori dal campo del cannocchiale. Avvicinando ancora di più le punte al coherer o aumentando la distanza esplosiva i movimenti aumentavano d'intensità, finchè assumevano un carattere disordinato; le particelle di PbO^2 compivano delle violenti escursioni fra gli elettrodi, e, rendendo sempre più intensa l'azione, lo strato di polvere fra gli elettrodi veniva sgombrato. In questi casi la deviazione del galvanometro evidentemente si annullava.

In tutte queste esperienze si faceva variare la direzione della scintilla nello spazio e si badava a non rendere piccola

la distanza fra il coherer e lo spinterometro per impedire che avvenissero delle scintille fra le punte e gli elettrodi di stagnola.

I fenomeni da me descritti non hanno bisogno di spiegazione.

Da queste esperienze si può però conchiudere, che la polvere di PbO^2 diminuisce di resistenza quando l'andamento della polarizzazione è regolare ed ordinato. Movimenti rapidi e disordinati prodotti dall'azione intensa, anche senza sgombrare il campo rompono i sottilissimi ponti, ricostituendoli in parte con particelle più o meno grosse che con tale azione partecipano al movimento disgregandosi: la polarizzazione è *disturbata* e la polvere accusa un aumento di resistenza.

Per studiare adesso l'azione esercitata dalle onde elettriche sopra tale coherer, io adoperai l'oscillatore di Hertz con palline nell'olio di vasellina e la nota disposizione dei fili di Lecher per la produzione delle onde stazionarie. A distanza variabile dai medesimi si disponeva il microscopio con il coherer e si facevano allora le solite osservazioni. Così eseguendo le ricerche si poteva constatare che appena eccitate le onde elettriche scoccavano delle scintille fra gli elettrodi del coherer, la polvere veniva proiettata all'intorno delle scintille, in tal maniera il campo fra quelli era sgombrato ed il galvanometro tornava a zero.

Come è noto l'effetto delle onde elettriche era lo stesso sia che il coherer si trovasse in un ventre, sia che si trovasse in un nodo.

Smisi allora di adoperare una tale disposizione sperimentale, perchè l'azione delle onde elettriche era violenta e le scintille nel coherer dovevano avere evidentemente un'azione perturbatrice sui fenomeni del medesimo.

Decisi perciò di servirmi di un'azione più debole ed adoperai allora l'oscillatore di Lodge, di cui le sfere più piccole erano messe in comunicazione con i poli del secondario del piccolo rocchetto, il quale poteva essere eccitato da uno o da tre elementi Grenet al massimo.

Una delle sferette fu messa in comunicazione con il suolo

l' altra con un' antenna, ed analogo collegamento si fece agli estremi del coherer (1).

L' oscillatore era posto a distanza variabile fra 50 cm. e 1 m. dal microscopio e le distanze esplosive fra le sfere potevano raggiungere al massimo 1, 5 mm.

Con tali azioni deboli prodotte dal detto oscillatore nella polvere di PbO^2 non si vedevano scintille ma soltanto movimenti. Costruendo dei ponti di polvere con una o più interruzioni si osservava che questi si chiudevano sotto l' azione delle onde elettriche, e i movimenti delle particelle erano soltanto visibili quando s' interrompeva il circuito del coherer. Se si lasciava chiuso il medesimo non si osservavano movimenti sensibili ed il galvanometro non si spostava dallo zero, mentre al contrario quando si apriva il detto circuito ed in punti particolari si chiudevano le interruzioni dei ponti, il galvanometro deviava e spessissimo l' immagine della scala usciva fuori dal campo del cannocchiale. Le distanze esplosive erano ridotte piccolissime in queste esperienze (frazioni di mm.) con l' avvicinare le sferette dell' oscillatore alla sfera grande centrale.

Non era da pensare ad un' azione impedente esercitata dalla differenza di potenziale esistente agli estremi del coherer e stabilita dalla forza elettromotrice degli elementi Raoult, perchè fu sperimentato che i movimenti si verificavano anche quando si escludevano dal circuito i detti elementi.

Anche a circuito chiuso si osservavano talvolta delle variazioni della deviazione al galvanometro, ma non si constatavano movimenti sensibili nella polvere.

Le riferite ricerche mostrano la diminuzione di resistenza dei coherer a PbO^2 sotto l' influenza di deboli onde elettriche, ma si potè anche trovare come aumentando l' intensità delle oscillazioni col rendere grande la distanza esplosiva tra le sfere

(1) Nel seguito delle ricerche si tolse la comunicazione del coherer con il suolo perchè si constatò che non aveva influenza sensibile sull' andamento dei fenomeni in istudio.

dell' oscillatore i coherer predetti manifestavano degli aumenti della loro resistenza elettrica. Talvolta pur chiudendosi le interruzioni fra i ponti il galvanometro non deviava. Ciò però potendo dipendere da imperfette chiusure, si facevano delle esperienze costruendo dei ponti conduttori senza interruzioni e notando la corrispondente deviazione al galvanometro. Appena allora eccitate le onde ed aperto il circuito del coherer, si osservavano movimenti delle particelle di PbO^2, e successivamente la deviazione si trovava diminuita o spessissimo annullata.

Queste esperienze mi lasciarono qualche dubbio sulla interpretazione delle cause dei fenomeni, e mi fecero subito pensare all' influenza di cause perturbatrici sui medesimi.

Difatti, se facendo agire sul coherer delle onde intense si chiudevano sempre le interruzioni dei ponti senza però che la conduttività si stabilisse, e se viceversa facendo agire le medesime sui ponti già stabiliti la conduttività diminuiva o si annullava, era necessario di cercare quale potesse essere la causa di tale fenomeno.

Pensai subito a possibili scintille le quali sarebbero potute avvenire nella polvere, e non potendone vedere al microscopio ricorsi ad esperienze con le fotografie dei coherer.

Tali scintille piccolissime invisibili al microscopio sarebbero state probabilmente svelate dalle lastre fotografiche. L' opinione che vi fossero delle scintille quando i coherer aumentavano di resistenza veniva giustificata dal fatto, che si vedevano sparpagliamento di particelle e violenti movimenti concomitanti la formazione dei ponti.

Ricerche fotografiche

3. Istituii perciò delle esperienze simili a quelle fatte da Malagoli (1) e misi in opera tutte le precauzioni necessarie per un sicuro esito delle esperienze.

(1) Elettricista 1898 — N. 9 p. 193.

In una scatola di cartone 9 × 12, coperta internamente ed esternamente da carta nera veniva introdotta una lastra fotografica 6 ½ 9 sopra la cui pellicola sensibile si collocavano due pezzi triangolari d'ottone, provvisti di fili che pescavano in due bicchierini con mercurio fissati sulle pareti della scatola.

Dai due bicchierini partivano poi due fili che potevano essere congiunti al circuito del galvanometro. L'intervallo fra i vertici delle dette lastre triangolari, variabile fra 1 o 2 mm., veniva chiuso con uno o più ponti di PbO^2, e si notava quindi la deviazione al galvanometro. Esponendo allora la scatola ben chiusa per 20^m o 30^m alle onde elettriche, la deviazione si riduceva o si annullava. Le lastre fotografiche, sviluppate dopo all'idrochinone, non mostravano traccia alcuna di scintilla nel posto dove si trovava la polvere, la qual cosa mi fece realmente convinto che l'aumento di resistenza dei coherer a PbO^2 sotto l'influenza delle onde elettriche non deve dipendere dalle scintille che si possono ottenere nei coherer, come pensa Sundorph (1).

Messa in evidenza, almeno nei limiti delle mie esperienze, l'assenza di scintille, io proseguì lo studio delle variazioni di resistenza dei coherer a PbO^2, ed ebbi occasione di osservare i fatti che qui espongo.

Toccando con la mano l'estremo dell'oscillatore in comunicazione con l'antenna potei constatare che si ottenevano forti movimenti nella polvere del coherer e conseguenti aumenti di resistenze del medesimo.

Ancora con maggior efficacia agivano le oscillazioni lente dell'antenna le quali mettevano in vivacissimi e disordinati movimenti le particelle di PbO^2. Tali oscillazioni si ottenevano mettendo in comunicazione un polo del secondario del rocchetto con l'antenna, e l'altro col suolo. In tutti questi casi il coherer presentava degli aumenti di resistenza sotto l'influenza delle onde elettriche.

(1) Wied. Ann. 1899 p. 319 Band. 69.

Esperienze con elettrodi di natura diversa.

4. Nel corso delle mie numerose esperienze mi fu dato notare che, quando con oscillazioni di debole intensità si costruiva un ponte interrotto verso il centro del coherer, quest' ultimo diminuiva di resistenza sotto l' influenza delle onde, mentre se si stabiliva un' interruzione fra il PbO^2 ed uno degli elettrodi di stagnola, si aveva un aumento di resistenza caratterizzato dal fatto che dopo chiusa l' interruzione il galvanometro non deviava, e partendo da una deviazione iniziale ottenuta con lo stabilire un contatto imperfetto tra l' elettrodo ed il PbO^2, si aveva la riduzione o l' annullamento della medesima.

Per verificare tale fatto nei coherer ordinari si adoperò un piccolo coherer, lungo 3 cm. e con gli elettrodi di rame. La distanza fra questi poteva variare nell'ordine dei millimetri, perchè uno degli elettrodi era provvisto di vite, che si poteva muovere in apposita madrevite fissata nel tubetto di vetro del coherer.

Per osservare l' azione delle onde elettriche deboli verso il centro del coherer, io feci un buco nel vetro compreso fra gli elettrodi, e così con il solito ago da cucire potevo formare dei ponti sotto il campo del microscopio, i quali potevano presentare un' interruzione fra PbO^2 e PbO^2 ovvero fra PbO^2 ed uno degli elettrodi di rame.

Vennero così confermati i risultati trovati per i coherer stratiformi, di guisa che in questa prima serie di ricerche si destò in me il sospetto che il contatto PbO^2 - PbO^2 si comportasse diversamente del contatto eterogeneo PbO^2 - metallo rispetto all'azione delle onde elettriche. Per amor di brevità qui non trascrivo le cifre che indicano la variazione della deviazione galvanometrica nei due casi.

Ad evitare possibili cause d' errore, siccome la polvere di PbO^2 aderiva facilmente agli elettrodi, avevo cura ad ogni esperienza di pulire bene gli elettrodi in modo da essere sicuro che l' azione delle onde si esercitasse sull' interruzione PbO^2 - metallo.

Sospettando così che potesse avere influenza la natura degli elettrodi, costrussi dei coherer stratiformi con elettrodi di oro e platino e dei coherer ordinarî e stratiformi con elettrodi di carbone. Un altro anche ne costrussi con elettrodi di PbO^2 bene impastato con gomma.

Esaminando tutti questi coherer al microscopio per vedere i movimenti e la formazione dei ponti, constatai che le esperienze seguirono tutte nella stessa guisa come le già riferite, così che abbandonai l'idea che la natura dell'elettrodo avesse potuto avere un'influenza sui fenomeni dei coherer a PbO^2.

Pensai piuttosto alle atmosfere gassose esistenti alla superficie degli elettrodi ed avviluppanti le particelle di PbO^2. Tali atmosfere evidentemente distribuite in modo diverso sopra corpi di natura diversa si sarebbero potute diversamente modificare, sotto l'azione delle onde elettriche, agli elettrodi e fra la polvere, donde il comportamento differente del contatto PbO^2-PbO^2 rispetto al contatto PbO^2-metallo.

Esperienze con il PbO^2 nell'aria rarefatta.

5. Per tali ragioni costrussi un coherer con serbatoio di PbO^2, con elettrodi di platino fissi a 4 mm. di distanza e vi feci il vuoto con la pompa Sprengel. (1) Istituî così delle ricerche analoghe a quelle di Dorn, (2) ma non mi fu dato trovare alcun risultato notevole. Anche sotto deboli azioni il coherer aumentava di resistenza.

Fino a questa serie di esperienze avevo dunque trovato che l'azione negativa era localizzata nel contatto PbO^2-metallo, ma nel seguito delle ricerche avendo osservato che anche il contatto PbO^2-PbO^2 con onde intense manifestava un accrescimento di resistenza, rimasi ancora più dubbioso sulla vera causa dei fenomeni.

---

(1) A. Righi e B. Dessau — *La telegrafia senza fili*, Bologna 1903 pag. 317.

(2) Wied. Ann. Band. 66. 1898 p. 146.

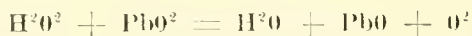
Quale poteva essere la causa per la quale i ponti di PbO^2 pur chiudendosi non divenivano conduttori? Che cosa mai poteva avvenire nei contatti fra le particelle di PbO^2?

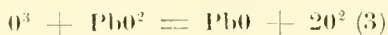
Mi venne fatto subito di pensare alle esperienze di Sundorph (1) sulla trasformazione del PbO^2 in PbO cattivo conduttore per azione delle scintille. Secondo tale autore la detta trasformazione chimica sarebbe la causa per la quale il coherer esposto alle onde elettriche aumenterebbe di resistenza.

Pur non avendo constatato l'esistenza di scintille, io sospettavo che sotto l'azione elettrica intensa il PbO^2 potesse trasformarsi in PbO, quando si chiudevano le interruzioni fra i ponti.

Poteva infatti svilupparsi del calore (2) fra le particelle di PbO^2, sebbene io mi accertai della poca influenza di un riscaldamento su di un coherer a PbO^2 avvicinando al medesimo una fiamma Bunsen.

Poteva svilupparsi una piccolissima quantità d'ozono, la quale avrebbe potuto ridurre il PbO^2. Si sa infatti che l'azione dell'acqua ossigenata sul PbO^2 è la seguente

$$H^2O^2 + PbO^2 = H^2O + PbO + O^2$$

l'ozono agirebbe nella stessa guisa dando luogo alla seguente reazione:

$$O^3 + PbO^2 = PbO + 2O^2 \text{ (3)}$$

Sebbene fossero difficili con la mia disposizione sperimentale sviluppo sufficiente di calore o produzione di ozono, pur tuttavia per escludere addirittura la trasformazione del PbO^2 in PbO come causa dell'aumento di resistenza, istituî delle ricerche chimiche.

(1) l. c.

(2) Temperatura di scomposizione del PbO^2 e 100°.

(3) Mi riserbo di studiare la trasformazione del PbO^2 in PbO per azione dell'elettricità in un gas inerte.

Ricerche chimiche.

6. Si esponeva la polvere all' azione delle onde elettriche intense e si ripetevano queste esperienze per parecchie volte su di una stessa porzione di polvere, e per parecchi giorni sopra diverse porzioni, per avere così una discreta quantità di PbO^2 che aveva manifestato l' aumento di resistenza.

Con esperienze preliminari si faceva avvenire la scarica in una certa quantità di polvere messa direttamente fra le punte dello spinterometro legato al rocchetto, o si metteva in comunicazione una sferetta dell' oscillatore con un estremo del coherer. In entrambi i casi si avevano delle scintille nella polvere e la susseguente analisi chimica accusava la trasformazione del PbO^2 nel PbO cattivo conduttore.

Se allora si facevano le esperienze come ho riferito nel principio del presente paragrafo, e poi si analizzava il prodotto non si trovava traccia sensibile di PbO.

Il metodo adoperato in queste ricerche chimiche fu il seguente.

Si versava sul prodotto che si voleva analizzare una certa quantità di soluzione acquosa d' idrato potassico al 5 % o 10 % e si agitava il tutto. In tale modo l' ossido di piombo veniva sciolto mentre il PbO^2 rimaneva insolubile. Tale liquido, dopo essere stato filtrato veniva trattato con H^2S, il quale dava il precipitato caratteristico di PbS. Si capisce che il liquido non dava precipitato se il PbO^2 adoperato non conteneva ossido di piombo. Il metodo di ricerca era sensibilissimo e le analisi ripetute molte volte mi portarono alla conclusione che *l' aumento di resistenza dei coherer a PbO^2 per azione delle onde elettriche, sempre nei limiti delle mie esperienze, non dipende dalla trasformazione del PbO^2 nel PbO cattivo conduttore.*

Esperienze con ponti sottilissimi di PbO^2.

7. Nelle migliaia di esperienze da me eseguite per un anno intiero, avevo potuto nettamente osservare, che quando il coherer a PbO^2 manifestava una diminuzione della sua resistenza elettrica, sotto il campo del microscopio le interruzioni dei ponti si chiudevano lentissimamente e con movimenti regolari delle particelle.

Spessissimo un ponte chiuso lentamente con esili particelle di PbO^2 mostrava una diminuzione della sua resistenza, mentre un ponte chiuso con grosse particelle di PbO^2 manifestava un aumento, come si poteva constatare osservando la deviazione al galvanometro. Ed erano talvolta così esili le particelle di PbO^2, le quali chiudevano le interruzioni dei ponti, che per osservarle bene bisognava ricorrere all' ingrandimento di 120 diametri. Non solamente ciò io avevo potuto osservare, ma anche il fatto che la diminuzione di resistenza non si manifestava sempre con l' aprire e chiudere nel minor tempo possibile il circuito del coherer. Bisognava tenere aperto per un tempo relativamente lungo il detto circuito perchè si potesse constatare una diminuzione di resistenza.

A principio dell' apertura non si osservavano movimenti sensibili, ma dopo un certo tempo qualche particella o gruppo di particelle lentamente si muoveva ed andava a chiudere l' interruzione del ponte. Cercai di istituire delle ricerche per trovare una relazione tra il tempo d' apertura del circuito del coherer e l' aumento della deviazione al galvanometro, ma non vi riuscii, poichè da un canto le cifre ottenute erano irregolarissime e dall' altro tutto il mio studio era rivolto alla ricerca qualitativa delle cause dei fenomeni.

Do quì alcune cifre le quali dimostrano come la conduttività del coherer aumentasse con l' aumentare del tempo di apertura del circuito del medesimo.

Nella tabella seguente la prima colonna indica il numero d' ordine dell' esperienza, la seconda, il tempo d' apertura del circuito del coherer, la terza la deviazione iniziale, la quarta la deviazione al galvanometro all' atto della chiusura del medesimo, e la quinta la differenza tra le cifre della quarta e della terza colonna.

A.

Tre elementi Raoult nel circuito del coherer.

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
1ª	1^m	5^d	60^d	55^d
	1^m	60^d	125^d	65^d
	2^m	125^d	140^d	15^d
	2^m	140^d	200^d	60^d
2ª	$0^m\ 15^s$	$2.\ 0^d$	15^d	13^d
	$0^m\ 30^s$	15^d	20^d	5^d
	1^m	20^d	20^d	0^d
3ª	$0^m\ 30^s$	0^d	15^d	15^d
	1^m	15^d	30^d	15^d
	2^m	30^d	40^d	10^d
	4^m	40^d	80^d	40^d
4ª	1^m	0^d	50^d	50^d
	2^m	50^d	55_d	5^d
	5^m	55^d	70^d	15^d

B.

Un elemento Raoult nel circuito del coherer.

1^a	2^a	3^a	4^a	5^a
1^a	$0^m\ 5^s$	0^d	15^d	15^d
	$0^m\ 10^s$	15^d	35^d	20^d
	$0^m\ 30^s$	35^d	35^d	0^d
2^a	$0^m\ 2^s$	0^d	25^d	25^d
	$0^m\ 4^s$	25^d	25^d	0^d
	$0^m\ 30^s$	25^d	25^d	0^d
	1^m	25^d	30^d	5^d
3^a	$0^m\ 5^s$	0^d	20^d	20^d
	$0^m\ 10^s$	20^d	30^d	10^d
	1^m	30^d	40^d	10^d
	4^m	40^d	200^d	160^d
4^a	$0^m\ 2^s$	0^d	100^d	100^d
	$0^m\ 5^s$	100^d	110^d	10^d
	1^m	110^d	120^d	10^d
	5^m	120^d	200^d	80^d

In generale queste diminuzioni di resistenza erano ottenute col ridurre le scintille dell' oscillatore a qualche decimo di millimetro di lunghezza in modo da avere delle onde di debole intensità, al contrario quando si aumentava l'ampiezza delle oscillazioni con l' aumentare la lunghezza delle dette scintille sino ad 1 mm. o più, o si utilizzavano le oscillazioni lente dell' antenna, allora si avevano degli accrescimenti di resistenza.

L' esame microscopico nei due casi delle opposte variazioni

di resistenza, come ho già avuto occasione di riferire, metteva in rilievo sempre la diversità dei movimenti nella polvere di PbO^2.

Più lenti, più regolari erano i movimenti e maggiore era la diminuzione di resistenza, mentre al contrario più bruschi ed irregolari erano i medesimi e con maggiore facilità si aveva l'aumento di resistenza della polvere.

In quest' ultimo caso non era mai estraneo all' apparente formazione dei ponti il fenomeno della *danza elettrica ed il disgregamento delle particelle di polvere di PbO^2.*

Sospettando che potesse avere influenza sui fenomeni la danza elettrica ed il disgregamento della polvere pensai di istituire una serie di ricerche costruendo però dei ponti sottilissimi di PbO^2.

Difatti ogni particella di PbO^2 che faceva parte del ponte conduttore, era costituita da un insieme di innumerevoli particelle, ed il disgregamento della medesima ne era la prova.

Quando il coherer manifestava delle diminuzioni di resistenza, attesa la poca intensità dell' azione, soltanto piccole particelle subivano dei lenti movimenti, in un tempo relativamente lungo e non si osservavano disgregamenti sensibili dei granelli di polvere, mentre quando il coherer manifestava l' aumento di resistenza, data la intensità sufficiente dell' azione, entravano in movimento grosse particelle, le quali si suddividevano in innumerevoli granelli di polvere all'atto della formazione dei ponti.

Sin da ora chiamerò *ponti elementari* quelli costituiti da particelle semplici e non multiple di PbO^2. Per costruire tali ponti elementari suddividevo le particelle multiple con l' ago da cucire sotto il microscopio in minutissimi granelli , e ciò per quanto mi era possibile. Tali esperienze erano penosissime, non essende talvolta sufficiente un' ora intera di continua osservazione al microscopio per costruire dei ponti che si avvicinassero nel miglior modo possibile ai ponti elementari. I piccoli corpuscoli aderivano all' ago ed alla superficie del coherer, e spessissimo avveniva che mentre il ponte stava per essere costruito, un

movimento per poco irregolare dell' ago lo rompeva o ne aggruppava i corpuscoli, di guisa che bisognava ripetere l' operazione.

Però così procedendo, dopo avere superato in parte le difficoltà di costruzione dei ponti esilissimi, un fatto notevole per quanto semplice mi fu dato osservare. In tali condizioni *l'azione intensa delle onde elettriche rompeva addirittura i ponti ed annullava la conduttività stabilita dai medesimi, mentre l' azione debole agiva efficacemente per chiudere le piccole interruzioni che a bella posta si creavano nei ponti*, e l' ago del galvanometro che indicava lo zero della scala a principio dell' esperienza, dopo l'azione deviava, e l' angolo di deviazione cresceva con la lentezza di chiusura delle interruzioni dei ponti.

Quasi sempre l' immagine della scala usciva fuori dal campo del cannocchiale. L' urto meccanico sul coherer rompeva i ponti ed annullava la conduttività stabilita precedentemente dalle onde elettriche.

Per realizzare più che mi era possibile la costruzione dei ponti elementari, e nello stesso tempo per rendere meno penose le esperienze, pensai di ricorrere al seguente artifizio.

Ho già parlato nel corso del presente lavoro dei movimenti regolarissimi e della concomitante lenta suddivisione delle particelle di PbO^2 in minutissimi corpuscoli a proposito delle esperienze eseguite con l' azione delle scariche del piccolo spinterometro a punte sul coherer stratiforme.

Riferendomi a questa particolarità collegavo per mezzo del commutatore di Pohl lo spinterometro al secondario del piccolo rocchetto, e nella prima fase dell' esperienza, mettendo le punte a poca distanza dalla polvere, costruivo i ponti sottilissimi; poi manovrando il commutatore mettevo in azione l' oscillatore di Lodge.—Le ricerche in tal modo istituite con minore difficoltà e con esito più sicuro delle precedenti confermarono le su esposte conclusioni e ciò in qualsiasi punto del coherer, *tanto cioè se si facevano agire le onde elettriche sull' interruzione PbO^2-elettrodo quanto sull' interruzione PbO^2 - PbO^2.*

Centinaia di esperienze, di cui qui non riporto i dati per brevità, trattandosi di esperienze puramente qualitative misero in chiaro le dette conclusioni, e l'osservazione al galvanometro serviva di conferma.

Tutte le riferite esperienze e conclusioni vennero confermate con le osservazioni al microscopio istituite sopra il piccolo coherer con elettrodi di rame e del quale ho già parlato.

Fra le due azioni opposte esercitate dalle onde intense e dalle deboli prodotte sempre dal detto oscillatore di Lodge era logico pensare che doveva essere compresa un'azione intermedia, la quale avrebbe potuto condurre ad un'apparente chiusura di ponti senza stabilire alcuna conduttività. Eseguendo infatti delle ricerche con ampiezza delle onde elettriche crescente o decrescente mi fu dato constatare in parecchi casi, che, mentre si chiudevano i ponti, non erano estranei i movimenti bruschi dei corpuscoli di PbO^2 in tali esperienze.

Talvolta quando l'interruzione si era costruita fra un elettrodo del coherer e la polvere, una particella veniva vivamente attratta dall'elettrodo e quindi in questo caso non si aveva che un semplice spostamento della interruzione, la quale prima dell'azione delle onde elettriche si trovava fra l'elettrodo ed il PbO^2 e dopo l'azione delle medesime si trovava fra PbO^2 e PbO^2.

Talvolta questo spostamento d'interruzione non era osservabile, ma un movimento della particella vicino l'elettrodo faceva arguire che quello doveva esservi.

In tutti questi casi in cui io osservavo una rapida chiusura d'interruzione senza aumento di conduttività a me sembrava evidente che la polarizzazione doveva essere disturbata.

Del resto l'apparente formazione dei ponti non implica che debba stabilirsi la conduttività: spesso infatti formavo dei ponti di particelle senza che la conduttività si stabilisse. Evidentemente il ponte apparentemente chiuso doveva in realtà essere aperto.

Di quest'azione esercitata dalle onde di media intensità sul

coherer ho voluto soltanto parlare per evitare possibili sorprese da parte di chi per avventura avesse vaghezza di ripetere le mie ricerche.

Esperienze con polveri metalliche

8. Nelle condizioni delle mie esperienze mettendo sul coherer stratiforme o nel coherer ordinario diverse polveri metalliche osservavo al microscopio quanto riferisco.

Nessun movimento sensibile di particelle veniva osservato quando il circuito del coherer era aperto. Nessuna diminuzione di resistenza constatava conseguentemente il galvanometro. Però se si formavano dei ponti di particelle metalliche, o, meglio ancora se si metteva un grande ammasso di polvere, allora anche a circuito chiuso il galvanometro deviava fortemente senza che nella polvere si osservassero movimenti sensibili. Ciò però non avveniva per tutti i metalli. Per osservare dei leggeri movimenti bisognava o toccare con la mano l' estremo dell' oscillatore in comunicazione con l'antenna, o fare agire addirittura le sole oscillazioni dell' antenna.

Riferisco alcune delle esperienze a tal uopo istituite.

Coherer stratiforme ad elettrodi di carbone

ALLUMINIO.

1. Si era costruito un ponte di Al fra gli elettrodi, ma esso non poteva essersi formato che apparentemente, poichè il galvanometro rimaneva allo zero della scala.

Eccitando le onde elettriche, ed essendo chiuso il circuito del coherer, l' immagine della scala usciva fuori dal campo del cannocchiale.

2. Avendo costruito un ponte con un' interruzione ed eccitando le onde elettriche non si osservava alcun movimento. Toccando con la mano il solito estremo dell'oscillatore, si osservavano leggieri movimenti, ma l' interruzione non si chiudeva.

Si chiudeva artificialmente l' interruzione e mantenendo aperto il circuito dei coherer si constatavano leggieri movimenti.

Chiudendo il circuito del coherer si trovava che la conduttività era stabilita.

Zinco

Nessun fenomeno si osservava con la polvere di tale metallo, nè a circuito aperto del coherer, nè a circuito chiuso, nè con onde intense, nè con onde deboli.

Rame

Il ponte era apparentemente costruito. L' immagine della scala usciva fuori dal campo del cannocchiale soltanto, quando a circuito aperto del coherer si toccava con la mano il solito estremo dell' oscillatore.

Acciaio, ghisa e nichel

Il ponte era apparentemente costruito. Eccitando le onde elettriche ed essendo chiuso il circuito del coherer l' immagine della scala usciva fuori dal campo del cannocchiale.

Magnesio

Non presentava alcun fenomeno.

Coherer stratiforme ad elettrodi di stagnola

Alluminio

Non presentava alcun fenomeno.

Acciaio

Si aveva un aumento di conduttività quando si facevano agire le onde elettriche su una discreta quantità di tornitura che manifestava una leggera conduttività iniziale.

RAME

Se si toccava con la mano il solito estremo dell'oscillatore si chiudeva apparentemente il ponte ma non si stabiliva la conduttività.

ZINCO

Non presentava alcun fenomeno.

GHISA

Si chiudevano le interruzioni dei ponti ma non si stabiliva la conduttività.

NICHEL

Si constatavano leggieri movimenti di particelle se si toccava con la mano il solito estremo dell' oscillatore.

Facendo agire le oscillazioni sul ponte apparentemente chiuso si stabiliva la conduttività.

MAGNESIO

Non presentava alcun fenomeno.

Le esposte esperienze servono semplicemente a mostrare come nelle condizioni in cui io facevo le ricerche per il PbO^2 i coherer stratiformi metallici mostravano dei risultati incerti, e non era evidente la formazione dei ponti.

Non mi pare che qui sia il caso di parlare di scintille microscopiche che sembravano essere escluse nella mia disposizione sperimentale, ed il modo d'agire dei detti coherer poteva essere indipendente dalle medesime, contrariamente a quanto asserisce Mizuno (1).

Ed altrettanto si può obbiettare alle recenti conclusioni del

(1) Philosophical magazine Vol. 50. 1900 p. 145.

lavoro di Hurmuzescu (1), il quale per spiegare il modo d'agire dei coherer metallici propone la seguente spiegazione:

« L'azione delle onde produce tra i grani metallici delle « scintille che determinano le saldature (coherer propriamente « dette) o degli effluvî che ossidano i grani ed aumentano la « resistenza delle catene metalliche (antidécohéreur).

« Quando il metallo non è in una atmosfera ossidante e « che la coesione non è determinata per saldatura, gli effluvî « cessano nel medesimo tempo che le onde e la resistenza au- « menta (cohéreurs autodécohérables).

Si poteva però constatare la formazione dei ponti conduttori nelle mie esperienze se si aveva cura di rimuovere con il solito ago da cucire la polvere metallica mentre si facevano delle osservazioni al microscopio. La polvere offriva una certa resistenza ad essere rimossa, e separando le particelle durante l'azione elettrica erano messi in evidenza i ponti conduttori costituiti da granelli di limatura uniti tra loro.

Dopo tale osservazione se si chiudeva il circuito del coherer la conduttività era stabilita.

Ho quindi ragione di credere che per il funzionamento del coherer metallici non sieno necessarie le scintille potendo il medesimo compiersi con la semplice polarizzazione dei granelli metallici.

CONCLUSIONI

9. Dalle mie ricerche sono indotto a concludere che:

1. *I coherer a PbO^2 possono non solamente manifestare degli aumenti di resistenza sotto l'influenza delle onde elettriche, ma anche delle* DIMINUZIONI.

(1) Société Française de phisique-résumé des communications faites dans la séance du 5 juin 1903.

2. L'aumento di resistenza dei coherer a PbO^2 si ottiene quando i medesimi sono sottoposti all' azione di onde intense, mentre la diminuzione di resistenza dei detti coherer si presenta quando questi sono sottoposti all' azione di onde debolissime, e cresce con il tempo d' azione delle medesime.

3. La causa dell'aumento di resistenza dei coherer a PbO^2 risiede nella distruzione dei ponti conduttori precedentemente stabiliti, mentre la causa della diminuzione va ascritta alla chiusura di interruzioni di ponti conduttori.

L' urto meccanico sul coherer rompe i ponti ed annulla la conduttività stabilita precedentemente dalle onde elettriche.

4. Perchè tali chiusure e distruzioni di ponti possano manifestarsi con nettezza è necessario costruire dei ponti elementari con particelle esilissime di PbO^2. Se si eseguono delle ricerche con grani grossi di polvere possono venire mascherate le osservazioni per le quali si traggono le precedenti conclusioni. Difatti interviene allora il disgregamento dei granelli di polvere in minutissimi corpuscoli, il quale ha sui grani la stessa azione di uno scuotimento.

5. Nelle stesse condizioni in cui i coherer a PbO^2 manifestano una diminuzione della loro resistenza elettrica, i coherer stratiformi metallici sono poco sensibili, e la formazione di catene conduttrici non sembra essere causata essenzialmente da scintille fra grano e grano di polvere, ed avviene con movimenti poco sensibili e con piccolissime distanze fra i grani.

Senza bisogno di ricorrere alla teoria di Bose, la quale presenta qualche lacuna, (1) e ricordando le esperienze di Tommasina, (2) il quale ripetendo le ricerche sui coherer di potassio e sodio immersi nel petrolio ed esposti all' azione delle onde elettriche, trova per i medesimi degli aumenti di resistenza che spiega benissimo con la teoria della coerenza, io credo che le mie presenti ricerche possono fare entrare benissimo il PbO^2 nella stessa teoria.

(1) Wied. Ann. 4 1901, pag. 762 ed anche Righi e Dessau l. c. pag. 226.

(2) *Journal de phisyque* — Agosto 1902, p. 556.

Oramai mi sembra abbastanza evidente perchè nelle esperienze di Branly (1) « sull' accrescimento di resistenza dei radioconduttori », toccando con un polo della macchina Wimshurst il tubo a PbO^2 la resistenza del medesimo cresceva fino a 10000^{ohm}. Io ho ripetuto le dette esperienze ed ho notato che toccando con un polo della macchina Wimshurst un estremo del coherer stratiforme a PbO^2 i ponti di polvere precedentemente stabilite si rompevano, mentre adoperando limatura metallica nelle stesse condizioni i ponti precedentemente aperti si chiudevano. La polvere di PbO^2 è formata da grani complessi costituiti alla loro volta da leggieri ed esili corpuscoli, ed è quindi evidente che soltanto un' azione debolissima, può mettere in chiaro il fenomeno delle coerenze.

Dal Laboratorio di Fisica della R. Università di Catania
Luglio 1903.

---

(1) Comptes Rendus Tomo 130—1900 p. 1069.

G. LOPRIORE e G. CONIGLIO

La fasciazione delle radici in rapporto ad azioni traumatiche.

> Per altro i rami fasciati non hanno figura obconica, pel motivo che il tessuto midollare non può tenere pari passo col circonferenziale tessuto dei fasci fibroso-vascolari, tanto moltiplicati. Quindi conviene che il ramo si schiacci e diventi nastriforme.
>
> Delpino, *Teoria generale della fillotassi*, 1883.

La fasciazione degli assi ha fermato da gran tempo l' attenzione dei botanici. Però le indagini relative, se numerose per gli assi caulinari e fiorali, difettano per i radicali, forse perchè lo sviluppo sotterraneo li sottrae all' osservazione ordinaria.

Poter, quindi, promuovere ad arte e seguire la fasciazione delle radici in colture acquose invece che nel terreno naturale, per metterla a riscontro con quella dei fusti, è, dal punto di vista morfologico e biologico, di grande importanza.

I mezzi traumatici, per tale scopo messi in atto, erano stati, in via di prova, già tentati da uno di noi, ma non ancora studiati in modo comparativo. Seguire tale studio, alla stregua di numerose colture artificiali e di accurati esperimenti, fu còmpito non facile dell' altro di noi, al quale, se fece prima difetto la esperienza, soccorse poi l' assiduità.

Queste indagini simbiotiche, integrate più tardi, nella parte sperimentale, da prove complementari su la pressione e l' incisione e, in quella statistica, da elementi tolti a ricerche compiute per altro scopo, cambiarono l' entità dei risultati primitivi.

Però le differenze, ora lievi ora notevoli fra questi e gli ultimi, non meritano particolare menzione in vista del largo contributo di nuovi elementi statistici, i quali, correggendo col numero la poca omogeneità loro, condussero a medie sempre più prossime al vero.

Le ricerche bibliografiche, compiute dall'uno di noi per indagini affini, prossime a comparire, vengono qui riassunte solo in quanto si riferiscono alle forme ed alle cause della fasciazione.

Ci è grato, intanto, ringraziare l' ottimo nostro collega e maestro, Prof. Fridiano Cavara, per l'ospitalità offertaci nell' Istituto botanico di questa Università e per l' interesse con cui egli seguì i nostri lavori.

Catania, autunno 1903.

G. LOPRIORE. G. CONIGLIO

CENNO STORICO

Per lo sviluppo storico dell' argomento e per quanto l' indagine potè finora acquisire, basti accennare che il concetto della fasciazione dei fusti, esposto prima dal Borrich (3), venne determinato più tardi dal Linneo (27), il quale dall'osservazione di casi numerosi trasse argomento per ritenere il fenomeno come effetto della concrezione di più cauli in uno stesso piano : « Fasciata dici solet planta cum plures caules connascuntur, ut unus ex plurimis instar fasciae evadet et compressus fit ».

Dal tempo di Linneo la fasciazione fu studiata non solo in relazione alle piante che la presentano, ma alle norme cui può sottostare (Meehan).

Senza riferire qui l' estesa letteratura, ma quanto occorre soltanto ad illustrare l' argomento nostro, basti dire che l' enumerazione fatta dal Detharding (13) mostra come la fasciazione sia comune a famiglie tanto numerose, quanto sistematicamente diverse. E se il Masters (30) riporta a 160 le specie, in cui la fasciazione era stata al tempo suo osservata, il numero si è elevato moltissimo di poi, estendendosi, secondo il Frank (18), a quasi tutte le piante, non escluse le crittogame. Infatti dal Kronfeld (26) venne osservata nel *Lycopodium clavatum* e dal Costantin (7) negl' ifomiceti , ascomiceti ed altri funghi , in cui fu causa della creazione erronea di specie nuove.

Per accennare i principali caratteri morfologici, rileveremo che gli assi fasciati adottano, secondo Moquin-Tandon (36), una forma semifogliacea, tanto se di consistenza tenera, quanto se legnosi ma giovani ancora. Fusti e rami fasciati sarebbero, quindi, prima cilindrici poi nastriformi, rimanendo sempre più o meno erbacei e succulenti, ragione per cui il fenomeno si riscontra più nei rami giovani che in quelli adulti.

La tendenza all' arrollamento dell' apice dei rami fasciati (fasciazione spirale) venne rilevata dallo stesso Moquin, che opportunamente paragona questi rami a foglie giovani di felci od a pastorali di vescovo. La fasciazione spirale assorbe, però, bene spesso gran parte dell' energia dell' asse. Così Mottareale (37) nota che in un caso di fasciazione del *Linum strictum* l' apice s' avvolgeva a spira, compiendone sino a due larghi passi, ma estinguendosi dopo quasi immediatamente.

Dalla fasciazione spirale differisce quella « anulare », in cui le segmentazioni degli elementi del cono vegetativo sogliono avvenire secondo zone circolari periferiche, tanto da ricordare, pur differendone interamente, alcuni ricettacoli fiorali cupuliformi. La designazione di « anulare », prima introdotta da A. Braun (4), che voleva seguire lo sviluppo di tal forma in comparazione a quello apicale di alcune crittogame, contiene evidentemente una contraddizione di dizione, poichè se fasciazione vale appiattimento od appianamento, non può certo essere anulare. Casi di fasciazione anulare vennero descritti dal de Vries (15) per la *Peperomia maculosa*, dal Michelis (34) pel *Taraxacum officinale* e dal Nestler (39) per la *Veronica longifolia*, ma non furono ancora osservati per le radici.

Oltre queste forme principali (piana, spirale e anulare), a cui possiamo riferire i tanti casi dagli autori descritti con criteri diversi, il de Vries distingue la fasciazione a cresta e la biforcata. La prima, con apice in forma di cresta, può trasmettersi ereditariamente per parecchie generazioni successive ed è la sola che il Nestler riconosca per vera in confronto dell' altra, accidentale, con apice bipartito.

Il caso osservato dal Keissler (23) in un fusto fasciato della *Lonicera caucasica*, di piegarsi più volte su sè stesso come a zig-zag e di produrre gemme seriali agli angoli esterni delle piegature non si può, per l' estrema rarità sua, riferire ad una delle forme precedenti.

Fra i caratteri comuni alle diverse forme di fasciazione,

quello, che suole verificarsi con maggiore costanza, è la presenza alla superficie degli assi fasciati di solchi o strie longitudinali, che, se pur si riscontrano in fusti e rami normali, non sono mai di numero e profondità così grande come in quelli fasciati.

Fra le tendenze da rilevare negli assi fasciati, la prima è quella di scindersi verso l' apice in rami cilindrici o depressi, somigliati dal MOQUIN-TANDON a denti di pettine, ergentisi da una linea comune (linea a pettine o linea di vegetazione). Questa mancherebbe, però, nel caso della regressione di filamenti staminali in lamine petaloidee, riferita parimenti dal MOQUIN alla fasciazione.

Una tendenza meno rilevante è quella delle gemme fiorali a svilupparsi in numero maggiore delle fogliari, che pur si svolgono in folla all' estremo dei rami fasciati. Strano è, però, il predominio assoluto di fiori unisessuali, o maschili [RETTIG (45)] o femminili [FERMOND (17)], osservato da questi autori nei fusti fasciati della *Cucurbita Pepo.*

Per le foglie, mentre il FRANK le ritiene normali, il MEZZANA (33) osserva che, col dilatarsi del caule, cresce il numero delle componenti di ciascuna serie fillotassica, ma si riduce proporzionalmente l'ampiezza delle lamine. Normali o ridotte, esse s' addensano per la brevità degli internodi specialmente verso l'apice, non permettendo riconoscere alcuna norma fillotassica.

Per il DELPINO (11) « la fasciazione rientra naturalmente nella giurisdizione delle fillotassi aberranti », cambiando l'indice fillotassico di continuo, dalla base all' apice, per divenire normale nei rami derivati dalla scissione.

Volendo qui riferire uno dei casi più semplici, osservato dall' JUNGNER (22) nel crespino, l' indice fillotassico era $^2/_5$ alla base di un ramo, passava a $^2/_6$, come questo appiattivasi, e diveniva $^2/_{10}$ verso l' apice che, dividendosi, dava luogo a due rami con l' indice primitivo $^2/_5$.

Ma non l' indice soltanto, la forma ancora di fillotassi può cambiare. Così ADR. DE JUSSIEU, per quanto riferiscono MOQUIN-

TANDON e DELPINO, avrebbe osservato in un caule fasciato del *Bupleurum falcatum* la conversione della tillotassi spirale in verticillare. Un caso precisamente identico osservava il DELPINO per la *Russelia juncea.*

Altra tendenza, che l'esperienza nostra non potè sempre confermare per le radici, è che « i cauli fasciati sogliono estinguere la loro vitalità ad un tratto, affogandola per così dire nell'eccesso della loro ipertrofia » (DELPINO); o meno esplicitamente: « les fascies d'ordinaire n'arrivent pas à beaucoup près à la même hauteur que les pieds à tiges cylindriques » (FERMOND).

I caratteri morfologici interni vengono in genere trascurati. Soltanto il DELPINO rileva che « i rami fasciati non hanno figura obconica, pel motivo che il tessuto midollare non può tenere pari passo col circonferenziale tessuto dei fasci fibroso vascolari, tanto moltiplicati. Quindi conviene che il ramo si schiacci e diventi nastriforme ».

Altri botanici, se accennano appena le particolarità del tessuto conduttore, rilevano specialmente quelle del midollo.

Il corpo midollare viene, anzi, assunto dal SORAUER (46) come un mezzo per distinguere due sorta di modificazioni degli assi fasciati: l'una p a t o l o g i c a, in cui il midollo ha sezione ovale allungata ed è cinto da un numero di fasci molto superiore al normale; l'altra, d o v u t a a p r e s s i o n e o ad a c c u m u l o di m a t e r i a l i n u t r i t i v i, in cui il midollo risulta di corpi singoli, cinti ognuno da anelli di fasci.

DEL TORRE (12) ha riscontrato del pari uno sviluppo enorme di midollo nei cauli fasciati della *Scrofularia canina*, oltre che un predominio nello xilema di vasi punteggiati ed una relativa scarsezza di trachee.

Anche DE TONI (14) rileva nei fusti fasciati del *Lithospermum officinale* il grande sviluppo del midollo, nonchè nei fasci legnosi la prevalenza di trachee e vasi punteggiati, seguiti da pochi anulari.

Ammessa la tendenza in alcuni rami ad incurvarsi verso l' apice , M. C. de Candolle (10) ha osservato che l' astuccio legnoso d' un ramo fasciato di pino era più ispessito dal lato convesso che dal concavo, presentando quasi la struttura iponastica d' un ramo laterale, sicchè, non potendo egli riferire la curvatura all' eliotropismo od al geotropismo, la riferisce alla stessa fasciazione in base alle dimensioni diverse dell' astuccio midollare. In proposito egli osserva che il ramo produceva germogli tanto sulle facce quanto sui margini ; il che svela un comportamento indifferente delle une e degli altri.

Quanto alle disposizioni meccaniche, inerenti alla fasciazione, il Sorauer ritiene che il corpo legnoso di rami fasciati sia molto più debole di quello cilindrico, ma non spiega se per la costituzione dei singoli fasci o per la distribuzione loro secondo una zona non circolare ma ellittica.

Il Grevillius (20) accenna ad un aumento nel numero dei cordoni collenchimatici negli steli fasciati della *Sideritis lanata,* per cui questi presentavano sezione poligonale, non quadrangolare, come quella ordinaria delle Labiate.

Il Nestler rileva la presenza nella fasciazione anulare della *Veronica longifolia* di due cerchi di fasci fibro-vascolari , di cui l'uno esterno con disposizione normale della parte cribrosa e vascolare, l'altro interno con floema e xilema disposti in modo inverso a quello ordinario. Quest' ultimo cessava ad una certa profondità, senza far riconoscere alcuna comunicazione con quello esterno, ma doveva certo elevare la meccanicità di esso.

Rispetto alle cause, la fasciazione , riferita fin dal tempo di Linneo alla concrescenza di più rami in uno stesso piano, venne riportata più tardi ad uno sviluppo anormale del cono vegetativo, il quale, mentre per A. Braun si bipartirebbe all'apice, per Moquin-Tandon si svilupperebbe in un piano unico.

Il Delpino ritiene « inappuntabile l' interpretazione data da Moquin-Tandon ed erronea invece quella sostenuta da Ma-

STERS, per il quale la fasciazione risulterebbe da una concrezione laterale di molti assi. »

L' interpretazione del MOQUIN viene in parte condivisa dal FRANK, che distingue due modi di origine della fasciazione: l' uno più frequente, ammesso anche dal CRAMER (8), per appiattimento e sviluppo del cono vegetativo secondo un piano; l' altro per concrescenza di più assi, indipendenti allo stato normale. Il FRANK intende spiegare questo secondo modo di origine, non diverso evidentemente dal linneano, con l' ammettere non la fusione di assi in origine distinti, ma la comparsa simultanea dei punti vegetativi di germogli iniziatisi l' un presso l' altro.

Il DE VRIES, pur tendendo ad una spiegazione diversa, ritiene che la fasciazione a cresta sia determinata dall' espansione del punto vegetativo e dalla sua trasformazione in linea vegetativa.

Il NESTLER conferma quest' idea ed afferma che ogni altra anomalia, la quale, invece d'una linea vegetativa continua, presenti punti vegetativi isolati, distanti l' uno dall' altro e corrispondenti ognuno ai singoli rami saldati, non merita il nome di fasciazione.

Anche il PENZIG (40) ribadisce il concetto che nel meristema apicale dell' asse primario o dei rami fasciati le segmentazioni avvengano prevalentemente in una direzione, dimodochè l' estremità un poco alla volta si allarga ed invece di rappresentare una prominenza conica, prende forma di una cresta. L' allargamento produce quindi uno spostarsi dei primordi fogliari ed un alterarsi nella disposizione delle foglie così densamente stipate.

Altre cause non più teratologiche, ma fisiologiche, perchè relative alle condizioni di nutrizione, possono, secondo altri, condurre alla fasciazione, che dal MEEHAN (32) vien riferita ora all'eccesso di materiale nutritivo, ora alla diminuita attività vitale. Alla prima condizione risponderebbe nei rami fasciati del *Rubus villosus* l' abbondanza frequente ora di fiori pieni, ora di fiori maschili con antere sviluppate e pistilli ridotti. Alla secon-

da condizione risponderebbero le fasciazioni del *Laurus Sassafras* e dell' *Abies balsamea* con rami di appena qualche pollice di lunghezza e con foglie pallide, cadenti precocemente in autunno.

Il concetto del MEEHAN, relativo alla prima condizione, vien confortato, oltre che dal FERMOND e dal DE VRIES, dalle osservazioni del FRANK, il quale ritiene l'eccesso di sostanze nutrienti come causa della fasciazione per la tendenza negli assi fasciati al gigantismo. Chè anzi l' energia di accrescimento è talora così grande che il caule fasciato, specie se fistuloso, come nel *Taraxacum officinale*, crepa e si fende longitudinalmente, mostrando strisce di corteccia arrollate a spira in conseguenza della tensione determinatasi nei tessuti.

Sebbene il NESTLER dia all' abbondante nutrizione un' importanza molto relativa, tendendo essa ad ampliare soltanto un fenomeno che non determina, pure le osservazioni del FRANK sono avvalorate da quelle anteriori del MAGNUS (29), che aveva osservato gli assi fasciati della *Campanula persicifolia* e *C. media* crepare per l' eccessivo trasporto di succhi e quelli del crespino portare gemme, che invece di rosette fogliari, producevano una sol foglia, andando l' intera energia a profitto dell' accrescimento dei rami fasciati.

Anche il RUSSELL (44) ritiene l'eccesso di sostanze alimentari come causa della fasciazione in esemplari di *Phaseolus multiflorus* e di *Myoporum parviflorum.*

Non è a credersi, però, che tutto il vigore si volga per la sola via vegetativa, affievolendo la facoltà riproduttiva. Parlano in contrario le osservazioni di DE VRIES, di FRANK e di ERNST, relative alla grande prolificità di piante fasciate e di quelle derivatene per seme. L' ERNST (16) avrebbe osservato un fusto fasciato di rosa portare non meno di 156 fiori a sviluppo completo, ed il RETTIG prodursi oltre 200 fiori maschili in una sola diramazione di un fusto fasciato di *Cucurbita Pepo.*

A parte le condizioni di nutrizione, la fasciazione dei fusti

può essere prodotta, secondo altre osservazioni, da cause estrinseche, come le traumatiche e le parassitarie.

Così il Borbàs (2) ritiene che la soppressione dell' apice produca, fra le tante anomalie, anche la fasciazione, dall'autore osservata presso molte piante spontanee, in cui per cause diverse era stato per tempo soppresso l' apice vegetativo.

Anche la pressione contro corpi duri può condurre alla fasciazione (Sorauer), comportandosi in modo analogo alle cause traumatiche. Al riguardo l' edera offre gli esempi più evidenti, riscontrabili del resto anche in piante volubili. Il Mezzana avrebbe infatti osservato che l'appiattimento di un fusto fasciato di *Cucurbita Pepo* « ebbe principio quando la pianta s'imbattè in pali di vite ed aggrappandosi ad essi con i suoi viticci si sollevò da terra. »

Quanto alle cause parassitarie, il Cuboni (9), dall' aver spesso ed in luoghi diversi ritrovato i *Phytoptus* sui cauli fasciati dello *Spartium junceum* e del *Sarothamnus scoparius*, li ritiene come causa probabile della fasciazione, mentre il Molliard (35) riporta decisamente questa alla presenza di larve di lepidotteri in fusti fasciati di *Picris hieracoides* e di larve di coleotteri in quelli del *Raphanus Raphanistrum*. Il Molliard pensa che le larve, percorrendo il midollo fino all' apice dei germogli, determinano una modificazione nel cono vegetativo tale da produrre l' appiattimento del ramo e la fasciazione ulteriore.

Anche il Prof. Cavara ci riferisce verbalmente di avere osservato un caso di fasciazione della *Cucurbita Pepo* prodotto da un batterio, ch'egli ha potuto isolare.

Ma interne od esterne che siano le cause nel promuovere la fasciazione, esse agiscono, secondo l' Jungner, sol quando l'apice vegetativo ha raggiunto il massimo d' attività, quando cioè il trasporto delle sostanze plastiche ed il processo di partizione cellulare sono energici.

Indipendentemente da queste cause, la fasciazione manifesta tendenze nettamente ereditarie, tanto da poter essere trasmessa e

portata sino ad un grado considerevole di fissità, pur conservando la tendenza atavica di ritornare alla forma normale.

Il de Vries, che ha il merito di aver studiato e seguito il fenomeno per molti anni, rileva che fra le piante prese in esperimento erano le più robuste e di esse i rami più grossi che si presentavano fasciati per influenza d' una nutrizione abbondante. Sicchè questa, a conferma di quanto ammette il Nestler per la deviazione teratologica del punto vegetativo in linea vegetativa, avrebbe l'effetto di ampliare un fenomeno ereditario, che determina ancor meno di quello teratologico.

In quanto alle radici, prescindendo dalle fasciazioni sotterranee delle Spiree, riferite dal Gravis (19) a stoloni e dal Caspary (6) a vere radici, prescindendo inoltre dai casi, accennati dal Sorauer ed illustrati dal Frank, in cui quelle si appiattiscono per penetrare nelle fenditure delle rocce, la letteratura botanica difetta al riguardo di notizie importanti.

Il solo Caspary riferisce un caso di radici aeree di edera, fasciatesi senza che la pressione o corpi estranei vi contribuissero per azione diretta o per stimolo di contatto. Cilindriche alla base, esse si appiattivano gradatamente verso l' apice, ramificandosi o presentando quasi delle forme a cresta. Il comportamento anatomico del cilindro centrale, che figura scisso in altri parziali, autorizza il Caspary, in appoggio alle idee di A. Braun, a ritenere la radice fasciata non come derivata dal connascimento di singoli inizii, ma come formazione unitaria di un gruppo di cellule iniziatosi con forma non conica ma piana e che, allungandosi, si scinde in parecchie radici, le quali prima non esistevano e che dopo si sviluppano isolatamente, rimanendo in uno stesso piano.

I casi di duplicazione, ritenuti dal van Tieghem (48) come « un phénomène particulier, accidentel assurément mais non très-rare » e da uno di noi (28) come radici fasciate collaterali non vengono dai botanici riferiti alla fasciazione. Simili casi, osservati prima nelle Ombrellifere poi in altre piante,

si verificano nelle sole radici secondarie, subordinatamente al numero dei fasci della primaria. « Plus est grand dans la racine-mère considerée le nombre de faisceaux ligneux et lyberiens du cylindre central, plus on a de chances d'y rencontrer des radicelles doubles. »

Queste radici, doppie nel senso di VAN TIEGHEM, collaterali nel senso nostro, differiscono dalle fasciate comuni o seriali per il fatto ch'esse si producono sol quando « deux radicelles appartenant à deux rangées voisines prennent naissance dans le pericicle en même temps et au même niveau ».

Tale condizione insieme a quella dell'alta poliarchia della radice primaria spiega perchè le radici doppie siano così rare.

L' esposizione obiettiva e brevissima della letteratura riguardante la fasciazione caulinare svela che questa, prescindendo dalla tendenza ereditaria, viene riferita ora a cause intrinseche, come sviluppo anormale del cono vegetativo e nutrizione sovrabbondante, ora a cause estrinseche, come le parassitarie e le meccaniche, che o modificano lo sviluppo normale o menomano l'integrità dell'apice vegetativo. Tali cause agirebbero direttamente sugli assi caulinari, producendo la fasciazione loro, non quella dei rami laterali, come sarà nostro proposito dimostrare per le radici.

Tra i fatti secondarî va rilevata la tendenza nei cauli fasciati alle fillotassi aberranti ed alla scissione in assi cilindrici.

La fasciazione delle radici, prescindendo da quelle doppie del VAN TIEGHEM, non ha formato oggetto di osservazioni così estese come quella dei fusti. L'unico caso, descritto dal CASPARY, si riferisce a radici aeree, non sotterranee, sviluppatesi liberamente senza stimolo di contatto od azione traumatica.

In questo senso appunto, che l'indagine prometteva risultati nuovi, l'attenzione nostra si volse con l'intento di provare se ostacoli, che nel terreno si oppongono allo sviluppo delle radici, od azioni traumatiche, compiute da ferri colturali, producano la fasciazione.

METODO

Il punto di partenza, da cui si mosse nelle presenti ricerche, fu quello già segnato da uno di noi: lo spacco o la soppressione del cono vegetativo delle radici primarie produce con grande costanza la fasciazione delle secondarie.

Per quest' intento si sperimentò tanto con radici di Monocotiledoni, come ad esempio di mais, quanto con quelle di alcune Dicotiledoni più comuni: fava, pisello, fagiuolo, ricino, ma specialmente della prima, che, per essersi mostrata più adatta allo scopo, venne preferita alle altre. Anzi i risultati qui riassunti si riferiscono quasi esclusivamente alle radici di fava.

I semi venivano messi a germinare in sabbia od in segatura di legno e, dopo che i fittoncini avevano raggiunto una lunghezza varia di 3 - 8 cm, erano castrati od incisi e rimessi in terreno naturale od allevati ulteriormente in colture acquose. Però l'esame dei fittoni sviluppatisi nel terreno offriva spesso difficoltà, rompendosi facilmente l' apice delle radici fasciate nell' atto di liberarle dal terreno e facile essendo lo spezzarsi in più punti di quelle a sviluppo poco regolare.

Il gran numero di colture, indispensabile ad ottenere materiale copioso e buono, nonchè la necessità di seguire passo passo il loro progresso, consigliarono l' impiego non delle solite lastre forate di vetro opaco, sibbene di reti a maglie larghe di filo di spago o ferro zincato, distese su cerchi metallici e adagiate su ampi bacini.

Così, sollevando in alto questa sorta di crivello, è possibile scegliere nel momento più opportuno le radici da esaminare e lasciar crescere le altre in soluzione nutriente, cioè in acqua addizionata di nitrato potassico, fosfato monocalcico e traccie di solfato di ferro. Non s' impiegò una soluzione nutriente completa, come ad es. quella di Knop, per la cattiva esperienza fatta altre volte con l' acqua distillata e per il fatto di non poterne disporre

in quantità rilevante, dovendo molto spesso rinnovare le soluzioni per sottrarle alle invasioni di alghe.

Le colture venivano eseguite ad intervalli regolari di tempo di una o due settimane, per poi togliere da esse gli esemplari più caratteristici di radici fasciate ed esaminarli nelle particolarità loro più importanti o compiere sui fittoni altre osservazioni d' interesse statistico o rizotassico.

Le condizioni esterne di sostrato, esposizione, ecc. furono mantenute il più possibilmente costanti in tutte le serie di colture, per evitare differenze notevoli di risultati da una serie all'altra, atteso che la necessaria esposizione delle colture acquose alla luce doveva influire sull'intensità di accrescimento delle radici [cfr. KNY (25) « Influenza della luce sull' accrescimento delle radici terrestri »], i cui cilindri centrali inverdivano molto intensamente, mentre la corteccia rimaneva incolora.

I caratteri morfologici furono quelli a cui più specialmente si volse l' indagine; gli anatomici vengono qui riferiti solo in quanto possano servire d' illustrazione e commento ai primi.

Le azioni traumatiche studiate in modo comparativo furono la castrazione, la pressione, l' incisione anulare, radiale e tangenziale dei fittoni e, solo in via di prova, la soppressione delle radici secondarie.

Nell' indagare gli effetti, che siffatte azioni fanno risentire sulle radici primarie e secondarie, si offrirono, fra i semi di fava germinanti in sabbia od in segatura di legno, casi naturali di compressione dei fittoncini fra i cotiledoni, fra questi e i tegumenti e fra gli strati dei tegumenti stessi, nonchè altri di compressione anulare per parte dei tegumenti, i quali, essendo perforati in punti insoliti e di resistenza maggiore, strozzavano i fittoncini, formandovi solchi anulari abbastanza profondi.

Tali casi, per essere naturali e per verificarsi nei primi stadi di sviluppo dei fittoni, riuscivano particolarmente importanti, servendo di confronto e d' illustrazione a quanto per lo stesso scopo si tentava in via artificiale.

CASTRAZIONE

L'asportazione dell'apice vegetativo o c a s t r a z i o n e, compiuta con un taglio trasversale quando ancora le radici secondarie non sono comparse sui fittoncini di fava, rappresenta il mezzo migliore per provocare la fasciazione di quelle. Lo sviluppo ne è infatti enorme e, sia per numero che per distribuzione, radici così fittamente stipate sul moncone, arieggiano quasi a quelle fascicolate delle Monocotiledoni.

L' operazione eseguivasi ad una distanza diversa, ma costante per ogni serie d' esperienze, dal piano d' inserzione dei cotiledoni, il quale rappresentava una regione fissa di partenza. Questa distanza fu per tutta una serie d' esperienze di 3, per una seconda di 5 e per una terza di 7 centimetri, a seconda del grado di robustezza dei fittoncini.

Senza qui riportare i singoli dati raccolti dalle numerose colture, ma riferendoci alle sole medie, che, per maggior comodità, arrotondiamo, si ottenne nella prima serie di esperienze una media di poco superiore a quella di 10 radici secondarie per ogni centimetro di lunghezza della primaria castrata, nella seconda una media poco inferiore a 7 e nella terza una media di 5.

Nella prima serie il numero delle radici secondarie fasciate stava a quello delle primarie nella proporzione di 5 : 9, nella seconda in quella di 5 : 10 e nella terza di 2 : 10.

Corrispondeva, quindi, alla media maggiore di radici secondarie per ogni centimetro di lunghezza della primaria castrata un numero maggiore di radici fasciate, sebbene quest' ultimo abbia un' importanza relativa, potendo una radice fasciata molto larga equivalere a due o più di larghezza minore.

Ad offrire intanto un criterio comparativo, riferibile alla frequenza delle radici fasciate su fittoni interi o su altri castrati alle distanze di 3, 5, 7 cm., a mostrare inoltre quanta differen-

za siavi fra i risultati delle singole colture e quanto importi derivare le medie da un numero grandissimo di dati, presentiamo il prospetto seguente. I rapporti sono anche qui arrotondati e per ogni serie d' esperienze si riferiscono a circa 200 esemplari.

FITTONI CASTRATI

Su	fittoni castrati a 3 cm.	avevano laterali fasciate
26		10
20		6
19		8
25		10
25		5
32		16
30		12
22		6
199		**73**

rapporto 37 $^0/_0$

Su	fittoni castrati a 5 cm.	avevano laterali fasciate.
30		7
20		6
30		6
25		8
25		6
20		6
25		6
23		7
198		**52**

rapporto 26 $^0/_0$

Su	fittoni castrati a 7 cm.	avevano laterali fasciate.
22		2
20		3
24		3
30		4
29		4
28		6
26		5
22		2
201		**29**

rapporto 15 $^0/_0$

FITTONI INTERI

Su	fittoni interi	avevano laterali fasciate
25		2
30		0
27		2
20		1
23		3
21		1
28		0
27		3
24		2
26		2
21		1
29		6
22		3
28		1
29		1
22		1
26		4
24		1
25		2
27		3
20		5
30		2
25		0
23		2
25		1
27		4
24		1
678		**54**

rapporto 8 $^0/_0$

Sarebbe stato certamente più esatto riferire il numero delle radici fasciate a quello delle secondarie cilindriche, ma siccome

la formazione acropeta di queste non cessa che tardi, così sarebbesi potuto soltanto a sviluppo compiuto di esse stabilire un rapporto più approssimativo. Ma, mentre verso l'apice nuove radici si formano, le più vecchie deperiscono sovente alla base.

D' altra parte radici giovani, di appena qualche millimetro di lunghezza, sebbene non possano per importanza paragonarsi a quelle fasciate, lunghe alle volte un decimetro e più, pure entrando con queste nella media, ne menomano certo il valore.

Risulta in ogni modo dal prospetto a pag. 16 che il numero delle radici fasciate è tanto maggiore quanto più breve è la distanza fra il piano d' inserzione dei cotiledoni e quello di asportazione dell' apice radicale. Il rapporto scende infatti dal 37 al 26 e da questo al 15 %, secondochè i fittoni vengono castrati rispettivamente alla distanza di 3, 5 e 7 cm. dai cotiledoni.

Tutti questi rapporti sono di gran lunga superiori a quello dell' 8 %, presentato da fittoni normali di fava e da ritenersi tanto più prossimo al vero in quanto posa su di un numero grandissimo di elementi costitutivi. A questo rapporto, che rappresenta la frequenza assoluta, può contrapporsi un altro sulla frequenza relativa. Infatti, dei 54 fittoni con radici secondarie fasciate, 26 ne presentavano una sola per fittone e 28 da 2 fino a 5. La frequenza relativa sarebbe quindi del 50 % circa.

Quanto precede è avvalorato dall' esame di un caso speciale, in cui un fittone naturalmente subiva una torsione elicoidale così forte da consumare in essa tutta la sua energia a danno dell' accrescimento apicale. In compenso esso presentava su appena 2 cm. di lunghezza 28 radici laterali appiattite e 4 fasciate, risolventisi in altre nove cilindriche, per cui si avevano nell' insieme 37 radici laterali, vale a dire 19 per ogni centimetro di lunghezza. Il fittone, essendosi appiattito in conseguenza della forte torsione, presentava le radici secondarie disposte quasi esclusivamente su due lati, a mo' di arti di gambero, ed assumeva come una sorta di dorsiventralità al pari dei fittoni sottoposti a pressione.

Quanto ai fatti generali, che accompagnano la castrazione, rileveremo che su fittoni castrati si osserva non di rado alla superficie del taglio ed in corrispondenza delle placche legnose la presenza come di tubercoli, derivati dal tessuto fondamentale e ricoprenti le estremità delle placche in forma di emergenze emisferiche, le quali, confluendo più tardi insieme, ricoprono il moncone di un « callo » — « blastogeno » di HANSTEIN (21) — atto ad impedire ulteriori deperimenti.

Bene spesso, però, s' inizia già per tempo, a partire dalla superficie del taglio e attraverso i vasi legnosi, un processo necrotico particolare, il quale, diffondendosi nel parenchima limitrofo, vi determina una lacuna unica, che all' osservazione si svela in forma di un foro e si spinge tanto più verso la base, quanto più progredita è la necrosi stessa. Questa può financo dal fittone passare alle radici laterali più prossime all'apice e gradatamente a quelle basilari.

Se, però, questo processo ritarda o non si desta, sicchè la formazione precoce del callo assicura l' incolumità dell' estremo del moncone, si compie non di rado in prossimità immediata di questo la formazione di radici laterali, che, per svilupparsi a chiodo e parallelamente fra di loro, sembrano la continuazione diretta in senso verticale dei cordoni vascolari.

Crediamo superfluo di accennare qui altri fatti secondari, rinviando alla esposizione del PETERS (41) e del WILL (49) sui processi di autotomia e di cicatrizzazione, nonchè alla nostra sulla rigenerazione del cono radicale, osservata anche prima dal PRANTL (43) in conseguenza dell'asportazione parziale di esso.

Una rigenerazione completa dell'apice, come nel caso delle metà prodotte da taglio longitudinale, non fu da noi osservata, essendo d'ordinario abbastanza lungo il tratto apicale asportato.

Per questa ragione non credemmo opportuno studiare gli effetti di ammaccature e percosse su fittoni, conducendo esse, per la loro irregolarità, a disfacimento inevitabile di tessuti, come del resto riferisce il FRANK anche sulla fede di HARTIG.

PRESSIONE

Mediante pressione meccanica esercitata sui fittoni si pensò di promuovere la fasciazione delle radici laterali secondarie.

Il concetto teorico che informava tali prove è abbastanza semplice: se, attraverso la superficie compressa, le radici secondarie non possono venire all'esterno, esse devono per necessità irrompere attraverso quella libera ed, invero, in numero maggiore dell'ordinario, tanto da compensare il difetto delle altre. E siccome il numero delle radici fasciate è in relazione diretta con quello delle cilindriche, speravasi di poter così notevolmente elevare il primo.

Il concetto sarebbe avvalorato in parte dalle recenti indagini del NĚMEC (38) relative alla «Influenza di fattori meccanici sulla fillotassi»: La pressione esercitata sul cono vegetativo della *Nepeta macrantha*, anche attraverso l'invoglio delle foglioline terminali, può impedire che le regioni maggiormente compresse della superficie apicale partecipino alla formazione dei primordi fogliari od all'estendersi delle loro basi d'inserzione.

Nelle nostre indagini, però, la pressione esercitata, sia per mezzo di tavolette convergenti in basso, fra cui si tenevano immersi i fittoncini in soluzioni nutrienti, sia premendo questi contro le pareti di vetro della Cassetta di germinazione del SACHS e costringendoli a rimanervi aderenti, non condusse ai risultati voluti.

Stante, infatti, il diametro diverso dei fittoncini, occorreva disporre non solo di una coppia di tavolette per ogni pianta ma di tavolette abbastanza larghe e lunghe, affinchè quelli risentissero della pressione per la lunghezza almeno dell'apice e non vi si sottraessero, per svilupparsi liberamente nella soluzione.

Nei pochi casi in cui i fittoncini crescevano verticalmente, senza volgere l'estremo in alto o di lato, avveniva che sull'a-

pice ancor giovane le tavolette convergenti in basso non esercitavano nel primo momento alcuna pressione, trasmettendosi questa sulle sole parti più vecchie e basilari dell' asse. Ma col tempo la radice allungavasi, lo spazio diveniva sempre più stretto ed il cono vegetativo risentiva della pressione, determinata dall' accrescimento in ispazio limitato.

I tentativi fatti mediante la Cassetta di germinazione del SACHS non condussero a risultati migliori, poichè, per quanto si tentasse mediante cunei, disposti verticalmente secondo l' asse maggiore della cassetta, ad aumentare la pressione della sabbia contro le pareti di vetro, non si riusciva nell' intento. Difatti radici primarie e secondarie, pur intrecciandosi fittamente fra loro, sino a forarsi, non presentavano un numero di fasciazioni maggiore dell' ordinario. Si seguì anzi per tale scopo l' irrorazione lenta degli strati inferiori invece che dei superiori della sabbia, i quali, assorbendo acqua e sollevandosi, avrebbero fatto diminuire la pressione.

Queste ragioni consigliarono di abbandonare simili mezzi e di escogitarne altri più opportuni e che meglio rispondessero alle condizioni naturali, per cui le radici si sviluppano, ad esempio, entro crepacci o fra pietre e massi. Per quest' intento vasi (tegami) alti 5-7 cm., attraversati nel fondo piatto da una feritoia larga un centimetro e lunga poco meno del diametro, venivano riempiti di buona terra sciolta, situati su di una lastra di vetro e circondati di un lieve strato di terreno irrorato con soluzione nutritizia.

Nel vaso ed in corrispondenza della feritoia si mettevano in due o più file i semi di fava quando i fittoncini avevano raggiunto una lunghezza di circa 3 cm., per modo che questi, allungandosi e penetrando attraverso la feritoia, si trovassero tra il fondo del vaso e la lastra di vetro, obbedendo allo stimolo chemotropico della soluzione contenuta nel terreno circostante.

Per tal modo è possibile, mediante la distribuzione uniforme di pesi sugli orli del vaso, di elevare e regolare a piacere

la pressione, che, nel caso nostro, raggiunse un massimo di 4 Cg. su 19 cmq. di superficie. Viene così a formarsi sotto il vaso una fitta rete di radici, da cui è possibile togliere per l'esame quelle che più interessano, lasciando crescere le altre.

Ma per quanto con questo mezzo si ottenessero risultati per altra via importanti, pure il numero delle fasciazioni riusciva di poco superiore a quello normale.

È da rilevarsi, infatti, che il numero maggiore delle fasciazioni era presentato da quei fittoni, il cui apice o per la forte pressione o per l' improvviso aggravarsi di essa era stato mortificato. I risultati sarebbero, quindi, identici a quelli ottenuti mediante la castrazione, tanto più che le fasciazioni più caratteristiche si presentavano sulla parte basilare e libera dei fittoni rimasta nel vaso. La parte compressa assumeva una sorta di dorsiventralità a causa della disposizione laterale delle radici secondarie, che in alcuni punti disponevansi sul fittone a mo' di piedi di gambero.

In parte per effetto della pressione, in parte per mancanza di spazio, i fittoni raggiungono una minor lunghezza di quelli cresciuti in soluzione nutriente, ma in compenso sono a tessuti molto più compatti, hanno percorso irregolarissimo, quasi ansiforme, ed una distribuzione delle radici secondarie limitata specialmente al tratto basilare.

Cedendo alla pressione, essi si appiattiscono, ma appena questa cessa, tendono a riprendere la forma cilindrica anche per tratti brevissimi, come per esempio addentrandosi fra le maglie della rete, formate dalle radici secondarie. L' appiattimento si verifica anche in queste per effetto della pressione, ma cessa ugualmente come questa viene a mancare, nè è conseguenza necessaria dello schiacciamento dei fittoni.

Tali prove dimostrano che la fasciazione delle radici secondarie non ha relazione con l' appiattimento dei fittoni e che questi possono resistere a pressioni notevoli senza abbandonare definitivamente la forma cilindrica.

La pressione, se graduale, ha per effetto di modificare tanto la forma della radice quanto quella dei suoi elementi anatomici. Così la forma ellittica della sezione trasversa del fittone viene a ritrovarsi nelle cellule del tessuto corticale ed in parte in quelle del fondamentale, mentre il tessuto conduttore, se non modifica sempre fondamentalmente la forma dei suoi elementi, tende ad una orientazione più opportuna, disponendo questi secondo l' asse maggiore della ellisse.

Se la pressione cresce di repente, rapidi ed esiziali ne sono gli effetti. E come per l'aumento progressivo le cellule corticali son quelle che più profondamente modificano la forma, così anche per quello saltuario ne risentono di più. Infatti le sezioni trasverse dei fittoni compressi, mostrano non di rado nella zona mediana della corteccia un cordone di cellule schiacciate ed a parete irregolarmente contratta, il quale corre parallelamente all' epidermide nel senso dell' asse maggiore della sezione ellittica della radice, interrompendosi all'altezza quasi dei due fochi.

Il cordone risulterebbe, quindi, di due tratti leggermente curvi e quasi paralleli, ad estremi convergenti ed a spessore poco omogeneo. Uno dei due tratti può, rispetto all' altro, assumere uno spessore minimo o mancare del tutto, a seconda dello spessore della zona relativa di corteccia. Non vi è ad ogni modo nulla di patogeno, non presentando siffatte cellule ispessimenti o suberificazioni rilevanti della parete, nè il lume ripieno della cosidetta g o m m a d i d i f e s a, tanto comune in radici soggette ad azioni traumatiche.

Il collasso delle cellule si verificherebbe in conseguenza delle dimensioni maggiori assunte, rispetto a quelle della regione interna ed esterna della corteccia, e si esplicherebbe in senso normale a quello in cui la pressione si esercita.

Mentre, quindi, il cono apicale è plastico, e per l' attivo accrescimento suo, si adatta con estrema facilità alle condizioni di spazio e di pressione, le parti adulte dei fittoni vengono invece passivamente compresse e sformate.

I risultati di queste indagini e le osservazioni da noi fatte su radici penetrate naturalmente nei crepacci di vasi mostrano da una parte l'estrema plasticità loro, dall'altra la tendenza a riprendere la forma cilindrica, cessata che sia la pressione.

Non troverebbe, quindi, conferma l'idea del SORAUER sulla persistenza dei fusti a conservarsi fasciati ed a produrre rami parimenti fasciati dopo che cessa la pressione quale causa determinante.

Tale idea si fonderebbe del resto sopra una sola osservazione di UTTERWAL, riferita dal TREVIRANUS, per cui un fusto di *Bignonia radicans*, fasciato in conseguenza della pressione da esso opposta contro un muro, conservavasi tale anche dopo di essersi elevato su questo ed allungato, producendo rami a lor volta fasciati.

Tendenze non diverse dai fittoni si manifestano anche nelle radici secondarie, le quali dalle rizotassi più aberranti, che presentano sui fittoni compressi, passano alle più regolari non appena cessa l'azione della pressione.

È probabile, quindi, che solo una pressione lieve, ma progressiva e continua sui coni vegetativi, paragonabile, per altro verso, agli effetti dell'azione lenta di parassiti, possa indurvi trasformazioni identiche a quelle compiutesi in apici fasciati.

Se l'osservazione nostra non potè finora riscontrare nessun caso di fittoni fasciati per azione diretta della pressione, la possibilità non ne è per ciò interamente esclusa. Il primo di noi ha rinvenuto, infatti, fra parecchi casi di perforazione longitudinale di tegumenti di fava, per parte di radici secondarie, uno importantissimo, in cui una radice penetrava cilindrica e ne usciva fasciata, scindendosi poco dopo in due cilindriche.

Una illustrazione dei fatti sinora esposti, relativi agli effetti della pressione, è offerta da un caso incontrato naturalmente e qui appresso descritto per la grande singolarità sua.

Trattasi di due radici secondarie, appartenenti a fittoni diversi, l'una perforante, l'altra perforata, incontratesi perpendicolarmente. La prima formava il braccio lungo d'una croce,

l' altra quello corto, che, per essere attraversato dal cono apicale della perforante e quindi conformato ad occhiello nel punto di incrocio, presentava un diametro maggiore dell' altra.

Che nel fatto trattavasi di una vera perforazione e non di una concrescenza, è dimostrato dall' osservazione che la radice perforata allargavasi nel punto d' incontro e presentava intorno al foro una disposizione particolare dei suoi elementi anatomici.

La perforante, in conseguenza della pressione esercitata dall' altra, non s' era strozzata ma appiattita come per effetto di pressione laterale e quindi presentava una corrispondente orientazione e riduzione degli elementi anatomici. L'orientazione di questi e le dimensioni delle due radici divenivano del tutto normali, procedendo gradatamente dal punto d' incrocio fino all' apice di esse.

Altri particolari anatomici da rilevare, perchè di maggiore illustrazione a quanto esponiamo, sono i seguenti : Le due radici erano e si conservavano tetrarche per tutta la loro lunghezza. La perforante, di aspetto sano e normale ed a sezione ellittica nel tratto compresso, presentava appunto due delle quattro placche legnose disposte secondo l'asse maggiore, due secondo quello minore della ellisse, disposizione questa che in rapporto alla pressione permette di considerare le placche come due libere e due compresse.

In conseguenza di una simile pressione, quasi bilaterale, la radice presentava, oltre che sezione ellittica e disposizione a croce delle placche legnose, una forma ed orientazione corrispondentemente particolare degli altri suoi elementi. Così il floema era a sviluppo nettamente tangenziale, presentandosi in forma di ellisse, interrotta soltanto in corrispondenza dei primani xilematici. Gli elementi del libro duro anticipavano la loro comparsa, per elevare forse la meccanicità del cilindro centrale, costituendo masse piuttosto compatte, distese tangenzialmente, tanto da presentarsi in sezione a forma di archi piuttosto che di triangoli. Analoga tendenza, a svilupparsi cioè preferentemente secondo un asse, esplicavasi del pari in altri elementi del cilin-

dro centrale e specialmente della corteccia, i quali erano diretti con l'asse maggiore nel senso stesso di quello della ellisse.

A confortare anzi con dati micrometrici questa breve esposizione, ne citeremo alcuni desunti da misure eseguite con l'oculare micrometrico III e l'obbiettivo II di SEIBERT ed espressi qui semplicemente in divisioni (div.) di millimetro.

La corteccia, come quella che più facilmente segue e si plasma alle condizioni esterne di sviluppo, presentava le modificazioni più profonde. A cominciare infatti dall' epidermide, le cellule erano nettamente distese nel senso dell' asse maggiore ed appiattite nel senso del minore. Quelle soltanto situate ai poli della sezione ellittica mostravano una tendenza opposta, degradante verso la linea di pressione massima.

Le cellule della zona corticale media si presentavano nella sezione trasversa in forma ovale od ellittica e distese secondo l'asse maggiore della sezione. Quello, però, che più colpiva l'attenzione era la presenza, in prossimità quasi dei due fochi della ellisse, di cellule a lume straordinariamente grande, financo doppio delle rimanenti. Si spiega un fatto simile, pensando che in tale regione di pressione minima le cellule avevano miglior agio di svilupparsi e di poter raggiungere le dimensioni massime di 14»11 div. rispetto a quelle medie di 7»6 delle cellule appartenenti alla regione più compressa.

Anche lo strato più interno della corteccia, l' endoderma, reagiva alla pressione in modo sensibilissimo, distendendo i suoi elementi, nel senso dell' asse maggiore della sezione ellittica, di una lunghezza almeno doppia che nel senso di quello minore, in direzione del quale gli elementi erano grandemente appiattiti e con Punti di CASPARY molto evidenti.

Il tratto basilare della radice perforante aveva, più su del foro, sezione quasi circolare del diametro di 200 div. e cilindro centrale di 55 div.

Il tratto, a sezione ellittica, compreso nel foro, aveva l'asse maggiore di 219 div., cioè $^1/_{10}$ più lungo del primo, il diametro

minore di 162 div. cioè $^1/_5$ più corto del primo. L'asse maggiore del cilindro centrale era di 68 div. cioè $^3/_{11}$ più lungo del primo, l'asse minore era di 46 div. cioè $^2/_{11}$ più corto del primo.

Il tratto libero, uscito dal foro, pur riducendo gradatamente le sue dimensioni verso l'apice, conservavasi alquanto appiattito, presentando in media 192»160 div. nell'intera sezione e 53»49 div. nel cilindro centrale.

Specialmente interessanti sono i dati relativi alle dimensioni ed alle distanze rispettive delle placche legnose, poichè svelano con maggior evidenza gli effetti su queste della pressione.

Difatti le placche legnose orientate nel senso dell'asse minore non solo ravvicinavano le basi, ma disponevano i loro elementi in file tangenziali, per occupare in senso radiale il meno possibile di spazio. Le altre due placche mostravano invece una tendenza nettamente opposta, distendendosi nel senso dell'asse maggiore della ellisse, disponendo gli elementi in una sola fila, anzi dislocandoli qua e là fra di loro e allontanando le basi l'una dall' altra.

Le misure, condotte sui tagli seriali del tratto compreso nel foro, mostrano che le placche legnose dell'asse minore sono lunghe in media l' una 13, 3, l' altra 12, 3 e distano per le basi 7 div. Le placche dell' asse maggiore misurano in media l'una 15, 3, l' altra 15 e distano per le basi nientemeno che 17, 6 div., cioè quasi 11 in più rispetto all' altra coppia.

Rilevata la tendenza nel floema a distendersi in direzione tangenziale, anche gli elementi del periciclo erano ai poli della ellisse $^1/_3$ più lunghi che agli estremi dell'asse minore, misurando 2,8»1,2 div. rispetto a quelle di 1,8»0,8.

Seguendo la radice nel suo tratto libero, sorprende che gli elementi riacquistino ben presto l'orientazione normale in tutte le regioni dianzi accennate, con questo di singolare che gli elementi del libro duro si riducono grandemente di numero. Simile riduzione, se naturale dalla base all' apice della radice, non procede, però, di pari passo con quella degli elementi legnosi.

I risultati qui esposti, relativi agli effetti della pressione sulla forma ed orientazione degli elementi anatomici nella radice in discorso, trovano riscontro in quelli ottenuti dal Ch.mo Prof. KNY nei suoi pregevoli studi relativi all' « Influenza della pressione e dello stiramento sulla direzione delle pareti divisorie di cellule vegetali in attiva partizione ». Anzi l' orientazione degli elementi corticali del *Pelargonium zonale*, soggetti a pressione artificiale e rappresentati nella fig. 8 Tav. I di quel lavoro, corrisponde a quella da noi più volte riscontrata nelle radici sottoposte a pressione.

Rispetto poi alla radice perforata, occorre innanzi tutto rilevare che gli elementi anatomici situati al di sopra del punto d' incrocio si presentavano un po' imbruniti e raramente col lume, ma ordinariamente con la parete impregnata di gomma di difesa. Il che fa pensare ad uno stato anormale della radice stessa.

Che tale stato fosse l' effetto della perforazione o che questa si compisse in conseguenza della necrosi di quella regione, non si potè nel momento dell' osservazione stabilire. Certo, però, che a poca distanza dall' incrocio la radice ripresentava il suo aspetto normale, conservandolo per un tratto abbastanza lungo.

La perforazione avveniva attraverso il cilindro centrale, che rimaneva scisso in due metà quasi uguali, congiunte da un segmento corrispondente di corteccia. Il che fa pensare ad un allontanamento delle placche xilematiche e quindi al passaggio in mezzo a loro del cono perforante.

Le parti limitanti il foro si presentavano in sezione come in forma di lenti biconvesse, ad estremi curvi e convergenti fra loro, oppure in forma di due semilune congiunte in modo da lasciare in mezzo un foro ellittico.

Mentre lungo il tratto perforato non lasciavasi riconoscere in sezione alcuna orientazione particolare degli elementi anatomici dei diversi sistemi, in quello libero, interposto fra il foro e l'apice, l' orientazione presentavasi del tutto normale. Le sole cellule corticali si erano disposte in file nettamente radiali.

È a dedurne, quindi, che la perforazione sia avvenuta su di una radice ancora vegeta e ad una certa distanza dall'apice. Che se poi si volesse ammettere il caso della perforazione dell'apice e relativa scissione sua in due metà, riunitesi poi in una radice unica, in conseguenza della pressione esercitata dal terreno, non mancherebbero esempi di casi analoghi. Uno di noi ha descritto infatti il caso di una radice aerea di *Pandanus caricosus*, il cui apice, dopo essere stato fenduto ed avere iniziato il processo di rigenerazione delle due metà, dette luogo, penetrando poi nel terreno, alla congiunzione di queste e quindi alla reintegrazione sua.

INCISIONE ANULARE

In modo analogo a quanto si fa per i tralci di vite con la Tenaglietta FUGINI, l'incisione anulare eseguivasi, mediante una pinzetta a punte rotonde e internamente striate, ad una distanza di 3-5 cm. dai cotiledoni.

Per la presenza, però, di un tessuto corticale molle e di un cilindro centrale ancor tenero, si finiva coll' intaccare questo o mortificare la corteccia, asportandone brandelli, non zone circolari continue, come era appunto nostro proposito, difficile, del resto, per difficoltà tecniche a raggiungere.

Eseguendo l' operazione con certa accuratezza, senza ledere il cilindro centrale, l' allungamento apicale dei fittoncini non veniva impedito e le radici laterali si formavano anche al di sotto dell' incisione in numero non molto inferiore a quello normale. Ma se la incisione intaccava il cilindro centrale, iniziavasi, a partire da essa, un processo necrotico, estendentesi tanto verso la base quanto verso l' apice e determinante financo la caduta del tratto di radice sottostante all' incisione.

I tentativi più volte falliti nelle colture acquose fecero pensare di sostituire un veicolo così dannoso d' infezione come l'acqua con del terreno soffice e di tener questo il meno possibil-

mente umido. Tale sostituzione, pur ovviando in parte al disfacimento indotto nei fittoni dall'inevitabile sbrindellarsi della corteccia, presentava d'altra parte l'inconveniente, già deplorato in precedenza, che i fittoni si rompevano facilmente nel punto leso, lasciando nel terreno l'estremo sottostante.

Per tali ragioni (accennata qui di volo l'importanza biologica e quella che potrebbe rifluire nella pratica agraria) il procedimento non venne preferito a quello ordinario.

Risultati analoghi a quelli ottenuti con la Tenaglietta si osservarono in tre fittoncini di fave germinate in segatura di legno.

I fittoncini avendo perforato i tegumenti al di sotto della caruncola ed incontrato quindi una resistenza maggiore, venivano da essi strozzati, sicchè, nello sforzo fatto per liberarsene, avevano spinto i tegumenti, già fenduti longitudinalmente secondo il piano di aderenza dei due cotiledoni, per una distanza da questi quasi eguale a quella della larghezza della incisione. Tale strozzatura, larga circa 6 mm., presentava un massimo di depressione nel mezzo, attenuantesi gradatamente verso gli estremi. Lungo questa depressione anulare i fittoncini si presentavano uniformemente suberificati, mentre il tratto libero era perfettamente sano e normale.

Sorprendeva intanto il fatto che in tutti tre gli esemplari i fittoni non presentavano, lungo il tratto compreso fra i cotiledoni e l'incisione, affatto radici secondarie, ad onta dello stimolo esercitato dai tegumenti. Un tentativo, però, di formazione si manifestò soltanto dopo che il tratto sottostante all'incisione si fu coperto di radici secondarie.

In un'altra serie d'esperienze venne tentata l'incisione, stringendo a doppio nodo i fittoncini con un filo di seta. Un siffatto processo, per quanto naturale e frequente in fusti e rami di piante cirranti, non lo è affatto in radici sotterranee; sicchè quando il cilindro centrale non viene strozzato, l'accrescimento apicale dei fittoni e la formazione di nuove radici laterali al disotto dell'incisione si compiono quasi normalmente. Se, però,

il cilindro centrale viene leso, allora, per l'iniziarsi di deperimento, estendentesi dal punto dell' incisione in due sensi opposti, il tratto sottostante ad essa viene a cadere.

Alla poca naturalezza del processo corrisponde parimenti nei fittoni un dissolversi precoce dei tessuti, per cui essi vanno a male, non lasciando neppure riconoscere se l' incisione, seguita dal deperimento del tratto apicale del fittone, equivalga per gli effetti alla castrazione eseguita con taglio reciso del fittone stesso.

INCISIONE RADIALE

L' incisione radiale dell' apice eseguivasi alla distanza variabile di 3-5 cm. dal piano d' inserzione dei cotiledoni, prima ancora che le radici secondarie accennassero a comparire.

Per quanto questo mezzo conducesse a risultati, per altro verso importanti, non corrispose all'aspettativa per la difficoltà di non poter sempre regolare la profondità del taglio, ma di dover intaccare o fendere il cono interno del pleroma e compromettere lo sviluppo apicale del fittone, producendo effetti identici a quelli della castrazione.

L' incisione, se limitata alla sola corteccia, non influisce sulla fasciazione delle radici secondarie, ma, in qualche raro caso, su quella del fittoncino medesimo, facendo risentire i suoi effetti fino alla profondità del cilindro centrale. A partire, infatti, dal limite inferiore dell' incisione, il fittoncino presentasi prima canalicolato, poi alquanto appiattito, sino a divenire nastriforme e risolversi da ultimo in due radici cilindriche, come se l'apice fosse stato fenduto longitudinalmente in due metà.

Ma l' incisione radiale, per dar luogo alla fasciazione temporanea o parziale dello stesso fittone e conseguentemente alla scissione del cilindro centrale, occorre che si spinga fino all'estremo dell' apice stesso e penetri negli strati più esterni del pleroma.

In qualche caso, però, gli elementi sottostanti al limite in-

terno dell' incisione vanno a male, sicchè il deperimento si approfonda nel cilindro centrale ed equivale, per gli effetti, all' incisione spinta fino al pleroma. L' azione della ferita farebbesi, dunque, risentire anche a distanza,

Se in conseguenza dell' incisione, i fittoncini vengono ad arrestarsi nel loro allungamento od a fendersi per l' apice, le radici laterali sono lunghe e robuste oppure depresse alla base e cilindriche all' apice od infine anche fasciate, come risulta dalle esperienze relative alla rigenerazione di radici spaccate (28).

Se invece i fittoni continuano ad allungarsi, allora le radici laterali hanno modo di svilupparsi anche al disotto dell' incisione, superando per numero le precedenti, ma rimanendo inferiori per lunghezza e grado di robustezza.

Come primo effetto della incisione si ha l' incurvamento a ginocchio del fittoncino nello stesso senso in cui quella viene eseguita. Quest' incurvamento o piegatura ad angolo ottuso talora persiste, tal'altra tende a scomparire, senza però che il fittoncino si raddrizzi completamente. E per quanto piccola l'incisione, essa riconoscesi sempre, anche più tardi, per via d' un leggero ingrossamento del fittoncino nel luogo in cui venne praticata.

Quanto alla proporzione delle radici laterali fasciate e cilindriche, su 166 fittoncini incisi radialmente 39 presentavano radici fasciate (quindi una proporzione del 23 %). I 119, che continuarono ad allungarsi, dettero una media di 6, 3 ; gli altri, che rimasero fenduti o s'arrestarono nell' accrescimento apicale, una media di 9, 2 radici laterali per ogni centimetro di lunghezza della superficie rizogena.

La media venne desunta dalle singole medie ottenute, dividendo il numero delle radici laterali di ogni fittone, nel primo caso, per la distanza (in centimetri) dai cotiledoni, a cui era inserita la radice più giovane, nel secondo caso per la distanza massima di 5 (centimetri), a cui era stata praticata l' incisione.

Tanto in questa quanto in altra serie d' esperienze si volle, in via subordinata, tener conto delle radici laterali delle singole

serie longitudinali, per osservare gli effetti della incisione sulle radici derivanti dalle lame legnose più prossime al piano d'incisione. Ma, eccezione fatta del raro caso, in cui le lame legnose venivano per breve tratto ad esser lese, poco risentivano le lame prossime al piano d'incisione degli effetti di questa, giudicando dal numero delle radici laterali non inferiore a quello normale.

L'esame rizotassico svelò il gran predominio di fittoni tetrarchi rispetto ai pentarchi, che formano $^1/_5$ appena del numero totale, inoltre la produzione in questi di radici laterali superiore a quella dei tetrarchi.

La disposizione a croce delle lame legnose spiega, quindi, perchè su 39 fittoni uno solo presenti due radici fasciate collaterali.

INCISIONE TANGENZIALE

Con l'incisione tangenziale si tentò in via di prova ad asportare in prossimità dell'apice, alla distanza di 3-5 cm. dai cotiledoni, una piccola porzione di corteccia, senza ledere possibilmente il pleroma, allo scopo di osservare se si verificassero, come per l'incisione radiale, l'incurvamento del fittone e la produzione di radici fasciate o di cilindriche in misura maggiore dell'ordinaria.

L'incurvamento del fittone riscontrandosi anche questa volta, occorre appena notare, per quel che riguarda gli altri fatti, che, se l'incisione penetrava fino al pleroma, la produzione di radici fasciate e di cilindriche superava quella ordinaria.

Su 25 fittoni così trattati 4 presentavano ognuno una radice fasciata ed uno ne presentava 3. Ogni fittone aveva in media 31 radice laterale ed una media di 3, 85 per ogni centimetro di lunghezza della superficie rizogena. Questa media venne desunta dividendo il numero totale delle radici secondarie di ogni fittone per la costante di 8 (centimetri), cioè per la distanza massima dai cotiledoni, a cui inserivasi la radice secondaria più giovane.

SOPPRESSIONE DELLE RADICI LATERALI

In via di esperimento si tentò pure la soppressione delle radici laterali, per stabilire se si potesse così influire sulla fasciazione di quelle di nuova formazione.

L' operazione, eseguita a mano, facendo scorrere i fittoncini fra pollice ed indice in senso inverso a quello della direzione delle radici secondarie, praticavasi quando i fittoni avevano raggiunto rispettivamente la lunghezza di 7, 10 e 13 cm., dovendo i risultati essere relativi alla lunghezza di quelli ed alla loro forza endogena.

La lunghezza minima di 7 cm. si mostrò bene scelta come limite inferiore nella prima serie d' esperienze, poichè, sebbene le laterali fossero corte od appena iniziate, pure la comparsa di quelle fra loro, che naturalmente tendevano alla fasciazione, era già avvenuta, senza che potesse invocarsi l' azione probabile della soppressione.

La lunghezza media di 10 cm. si mostrò, per altro verso, anche molto opportuna nella seconda serie di esperienze, rappresentando essa la lunghezza massima a cui soleva spingersi nelle colture di fava in soluzioni nutrienti l' emissione di radici secondarie.

Infine la lunghezza massima di 13 cm. venne adottata come limite estremo superiore nella terza serie di esperienze, allo scopo di stabilire, se la spiegata attività rizogena potesse ancora venir stimolata mediante la soppressione delle radici da essa stessa prima formate.

Senza qui esporre le particolarità di tali esperienze, va rilevato innanzi tutto il fatto che la soppressione, comunque eseguita, non provoca la fasciazione e che i pochi casi riscontrati, non superando la media ordinaria delle fasciate naturali, sono da ritenersi come normali e da non riportarsi quindi in conto della soppressione.

L'osservazione ebbe, però, anche qui a svelare che se l'apice del fittoncino veniva leso per tempo da cause d'indole diversa, verificavasi la formazione di radici fasciate come in fittoni castrati. Se, invece, la lesione del cono vegetativo avveniva quando il fittoncino aveva raggiunto la lunghezza di 7-10 cm., allora formavansi in prossimità dell'apice, radici così appiattite nel loro tratto basilare da sostituirsi quasi alle fasciate comuni.

Va rilevato inoltre il fatto che i fittoni, in conseguenza della soppressione, mostrano un accrescimento in lunghezza maggiore dell'ordinario e che l'emissione di nuove radici suole avvenire tanto al di sopra quanto al di sotto della regione delle radici soppresse. Lungo quest'ultima non si formano che poche radici, corte, esili, con apice annerito e con suberificazione precoce dell'intero percorso loro. Havvi, quindi, due regioni di produzione massima, entro cui s'intercala una di produzione minima.

Spiccata addimostrasi la tendenza nelle radici laterali di nuova formazione a produrre presso l'apice, in conseguenza, senza dubbio del suo deperimento, radici laterali terziarie e simulare così una falsa dicotomia o somigliare radici fillosserate.

In tutti gli esemplari di radici di fava sottoposti alla soppressione (in riprese diverse, circa 150) le radicelle di nuova formazione si presentavano precocemente suberificate, tanto da assumere un color rame caratteristico, al quale seguiva più tardi un imbrunimento più o meno spiccato, limitato specialmente verso l'apice in forma di scaglie. Al color rame ed alla suberificazione avanzata degli strati corticali più esterni corrisponde uno stato particolare anche nei tessuti sottostanti, per cui le radici laterali si spezzano facilmente ed il cilindro centrale presentasi imbrunito.

Siffatte radicelle sono esili, rigide, facili a rompersi, con percorso ansiforme e tali da impartire all'intero sistema l'aspetto di un raspo. Tale aspetto, se colpì specialmente in questa serie di prove l'attenzione nostra, tanto da riferirlo alla soppressione, non mancò in qualche esemplare di altre serie di colture, provocato parimenti da cause patologiche.

CARATTERI DELLE RADICI FASCIATE

Le radici secondarie fasciate sono seriali o collaterali. Le prime differiscono dalle altre per l'origine, la frequenza, la polimorfia, il modo d'impianto e di scissione.

Per l'origine, le seriali derivano dall' asse ipocotileo o da un breve tratto sottostante del fittone; le collaterali dalla metà non basilare del tratto rizogeno di questo. Le prime prendono origine nel periciclo in faccia ad un tratto molto lungo di lama legnosa; le seconde in corrispondenza non di una, ma di due lame legnose, che vi partecipano contemporaneamente secondo lo stesso piano orizzontale. L'inizio delle seriali si svela con prominenze non coniche ma cuneiformi, dirette nel senso stesso dell' asse del fittone; quello delle seriali non differisce dalle cilindriche ordinarie anche per il fatto della riduzione progressiva verso l' apice delle dimensioni loro.

Per la frequenza, le seriali sono molto più frequenti delle collaterali, che rappresentano casi rarissimi nelle Dicotiledoni, meno rari nelle Monocotiledoni, in cui costituiscono la sola forma di fasciazione radicale.

Per la polimorfia, le seriali presentano una folla di forme svariatissime, difficilmente riferibili a poche fondamentali; le collaterali offrono invece maggiore uniformità di caratteri e dimensioni. La forma ad 8 della sezione trasversa spetta loro quasi esclusivamente ed è carattere che le riporta ad un tipo unico.

Per il modo d'impianto le seriali si trovano, almeno per il tratto basilare, nello stesso piano dell' asse del fittone o della lama legnosa, da cui dipendono. Le collaterali s'impiantano invece con la base secondo un piano normale a quello dell'asse del fittone, quindi normalmente alle prime.

Per il modo di scissione, è costante la tendenza nelle

collaterali a scindersi in due, nelle seriali in due o più radici cilindriche. Le prime danno luogo a radici gemelle o doppie, nel senso di VAN TIEGHEM; le seconde ad un numero tanto maggiore di radici quanto più grande è la larghezza loro, senza però scindersi alla stessa altezza e far quindi riconoscere la linea di vegetazione o linea a pettine, ritenuta così caratteristica nei fusti fasciati dal MAXWEL (31) e da altri.

Se, nel fatto, le radici fasciate possono somigliare a pettini od a forchette per la tendenza a risolversi in singole radici cilindriche, se ne scostano, però, sia per il numero esiguo e la lunghezza variabile dei denti, sia ancora per l'altezza diversa da cui questi partono. Il trovarsi, però, siffatti denti, almeno alla base, nello stesso piano longitudinale, farebbe convenire il paragone forse meglio alle radici che non ai fusti, i cui germogli si trovano in piani diversi e, più che denti di pettine, simulano appendici di una corona.

Al riguardo la presenza sui cauli fasciati di solchi longitudinali è da noi confermata per le radici, che ne presentano uno solo e mediano se collaterali, ne presentano parecchi se seriali ed, invero, tanti quante sono le radici cilindriche, derivanti dalla scissione.

Per simile tendenza a scindersi, i solchi diventano verso l'apice sempre più profondi e larghi sino ad incontrarsi da parte a parte e determinare la separazione delle radici. La forma a rosario della sezione trasversa di simili radici è tipica abbastanza, per essere qui particolarmente illustrata.

Le radici-parziali, derivanti dalla scissione delle fasciate, sono nelle collaterali perfettamente cilindriche, tendenti verso questa forma nelle seriali. In queste le radici parziali svelano i comportamenti più diversi, procedendo ora parallelamente fra loro, ora divaricando e foggiandosi ad es. in forma di àncora, ora avvolgendosi l'una con l'altra a nodo. Contrariamente, quindi, ad altri processi schizogenici, la schizostelia produce schizorize molto diverse dal punto di vista morfologico.

Per tale rispetto le collaterali presentano la più grande uniformità, le seriali la più grande varietà di forme o proprie o riferibili in parte a quelle dei fusti, come ad es.: la piana, l'anulare e la spirale.

La piana, semplice per quanto rara, dovrebbe compiersi secondo un piano verticale, ma, per la tendenza alla scissione, raramente le radici parziali rimangono nello stesso piano del tratto fasciato, che a sua volta si curva e si piega. Astraendo, quindi, dal comportamento delle schizorize, questa forma di fasciazione sarebbe più frequente rispetto alle altre, tanto più che v'è non di rado passaggio graduale dalla forma fasciata alla cilindrica, senza che siavi scissione.

La fasciazione anulare è rarissima nelle radici. Però i pochi casi riscontrati in migliaia di esemplari confermerebbero il concetto, certamente originale ma non suffragato ancora da ricerche anatomiche, che i rami fasciati non sono obconici, non potendo il loro tessuto midollare tener pari passo con quello tanto moltiplicato dei fasci fibrovascolari. Questi casi, riferibili, per altro verso, alla schizostelia, saranno esposti più tardi e varranno a meglio illustrare il concetto nuovo e non conciliabile a prima vista con la fasciazione di rami fistulosi, enunciato dal Prof. Delpino.

La fasciazione spirale è frequente nelle radici dell'asse ipocotileo, sul quale presenta casi numerosi e diversi, non ravvisabili, nè forse possibili nei fusti, ma da noi pur seguiti nelle colture acquose, ove le radici sono molto più libere nei movimenti loro rispetto a quelle del terreno.

La tendenza ad avvolgersi in forma di spira fa somigliare simili radici, come si rilevò per i fusti, a pastorali di vescovo od a foglie di felci. Bene spesso, però, simile torsione è a danno dell'accrescimento apicale, che cessa del tutto o continua nel caso abbastanza raro che la radice, dopo aver segnato un largo passo di spira, riprende il suo allungamento in linea quasi retta.

Nell'arrollamento spirale le radici non vi partecipano in genere per tutta la loro estensione per il fatto che parte della

zona fasciata viene a sacrificarsi. Questa parte corrisponde ora alla più interna, ora alla più esterna, quasi mai ad una mediana della zona stessa e, o viene ad atrofizzarsi del tutto, o non di rado ad arrollarsi essa pure per breve lunghezza in senso inverso a quello della stessa fasciata.

Di norma la torsione spirale s' inizia dopo un tratto di fasciazione piana, ma non sempre, come ammette il NESTLER, per effetto di lesioni meccaniche, difficili a compiersi in colture acquose. Se, nondimeno, alla torsione precede o segue in alcuni casi la necrosi del tessuto corticale o vascolare, non si può non ammettere una certa correlazione fra l' una e l' altra anomalia.

Tra le forme di fasciazione, possibili nelle radici, ma difficili a verificarsi nei fusti, merita cenno la tendenza a torsioni elicoidali, per cui quelle si presentano in forma di chiocciola, costituita di un tratto largo alla base, progressivamente stretto in alto e terminante con una radice cilindrica che ne sormonta l' apice. In simile torsione è sempre il tratto interno che, o in conseguenza della pressione o per cause difficili a determinarsi, deperisce o dispare del tutto, lasciando il solo tratto esterno che si restringe e riduce ad una radice cilindrica.

Quanto agli altri caratteri morfologici delle fasciate seriali, basti accennare che le dimensioni variano così grandemente da non permettere di poter fissare alcuna norma, pur non discostandosi da quella generale di presentare una degradazione progressiva, a partire dal piano dei cotiledoni.

Per la larghezza, le radici fasciate non possono certo competere con i fusti, tenuto conto delle dimensioni relative e del diverso grado di dignità morfologica, essendo le radici in discorso assi secondari, non primari come i fusti, con cui le mettiamo a riscontro. Questo, però, va inteso con grande restrizione quando si pensa che i fusti non sogliono essere fasciati sin dalla base, ma passano gradatamente dalla forma cilindrica a quella appiattita, mentre le radici si comportano in modo inverso, pur risolvendosi come quelli in assi cilindrici.

Per lo spessore, le radici fasciate mostrano un decrescimento continuo dalla base all' apice, salvo il raro caso d' ingrossamenti fusiformi, che la radice presenta per l'improvviso destarsi di lacune nel cilindro centrale. Si comporterebbero, quindi, al pari dei fusti, in cui il passaggio dalla forma cilindrica alla fasciata è di solito seguito da una corrispondente diminuzione di spessore.

Lo spessore delle radici fasciate varia pure nel senso dell' asse trasverso. Al riguardo sono le fasciazioni spirali quelle che presentano le maggiori variazioni, perchè scindendosi gli assi, dopo il breve tratto avvolto a spira, in più radici cilindriche, fanno riconoscere al limite esterno la radice più sviluppata, a quello interno la più ridotta. Lo spessore decrescerebbe, quindi, con grande costanza dalla parte esterna a quella interna.

In un solo caso, per difficoltà tecniche non seguito accuratamente, si potè constatare che di due radici derivate da una spirale, la meno sviluppata era all'esterno. Deve forse attribuirsi a questa posizione insolita il fatto che non appena quest'ultima radice potè liberarsi dall'altra, si arrollò in senso diverso da essa.

Un carattere particolare delle fasciate seriali, ma che pare non spetti sempre ai fusti, per quanto almeno la letteratura e l' osservazione nostra soccorrono, è quello di presentare gli orli lievemente ondulati. A misura però che tali radici si risolvono in altre cilindriche, il carattere dispare, come del resto manca in quelle più strette.

Caratteristica è pure la tendenza ad uscire in forma di archi dal fittone e, per alcune più larghe dall' asse ipocotileo, di avvolgersi a spira intorno a questo, tentando persino di penetrare con l' apice in esso, o di presentare larghe pieghe, foggiandosi quasi a banderuole e portando in alto l' apice intero o crestato.

Sia per le dimensioni, sia ancora per il numero stragrande, in cui le laterali cilindriche e le fasciate irrompono dal fittone, questo presenta, specialmente se castrato, profonde dilacerazioni longitudinali, che dai cotiledoni si spingono fin quasi al limite della castrazione.

La zona più esterna di corteccia, intercedente fra queste dilacerazioni suole talora sollevarsi, rimanendo fissa al tessuto sottostante con i soli estremi, tal altra staccarsi con uno di questi ed arrollarsi in forma di spira su sè stessa. Simili fenditure, non che l'enorme ingrossamento assunto dai fittoni castrati, spiegano la grande reazione opposta alle azioni traumatiche e la conseguente irruzione di radici fasciate od appiattite.

I caratteri fin qui accennati si riferiscono alle fasciazioni tipiche, cioè a quelle molto larghe, il cui diametro minore entra più volte in quello maggiore della sezione trasversa. Per le strette, invece, buon numero di caratteri viene a mancare e la tipicità a perdersi. Radici con sezione ellittica alla base, terminano all' apice con quella circolare, frequente essendo simile tendenza nelle radici secondarie di fittoni castrati, in cui oltre che il passaggio dall'una all'altra forma di sezione, si verifica, dalla base all'apice, una corrispondente riduzione nel numero dei fasci.

La rizotassi delle radici fasciate non presenta alcuna relazione con la fillotassi dei fusti fasciati. Anzi, stando alle osservazioni dei Fratelli BRAVAIS (5), « mentre col passare da una regione relativamente sottile ad una più grossa, senza che si abbia un corrispondente aumento di larghezza nelle basi delle foglie, crescono i numeri secondarii » (33), nelle radici v' è riduzione invece nel numero di quelle laterali.

Siffatta riduzione, se naturale in assi secondari rispetto a quelli primari, sorprende tanto più, in quanto il numero delle lame legnose d' una radice fasciata, e quindi degli archi corrispondenti di periciclo, riferito a quello d'una cilindrica, dovrebbe fornire un numero maggiore di radici laterali. Queste tendono a formarsi non sulle facce piane, ma sugli orli delle radici fasciate, cioè in corrispondenza dell' asse maggiore della sezione trasversa, come appunto i fiori della *Muehlenbeckia platyclada* sui fillocladi di questa pianta.

Le fasciazioni delle radici si comportano anche per un altro riguardo in modo inverso a quelle dei fusti. In queste i ger-

mogli apicali ed i picciuoli fogliari si ripresentano spesso a lor volta fasciati (l'evonimo ad es.), mentre nelle radici non riscontrasi mai la stessa tendenza, chè anzi l' unico caso d' una terziaria fasciata si ebbe su di una secondaria cilindrica.

Per quel che riguarda l' endogenia delle radici fasciate, accenneremo le sole generalità del processo, non potendo questo essere illustrato se non alla stregua di ricerche microtomiche, dirette a studiare il comportamento speciale dell' apice vegetativo di fusti e radici.

Come già premesso, le fasciate seriali derivano da una lama legnosa che col relativo libro vi partecipa per un tratto abbastanza lungo, avvolgendosi di un mantello esteso di corteccia; le collaterali derivano non da una ma da due lame legnose, che prendono parte alla formazione, nello stesso tempo e livello, per tratti relativamente brevi ma uguali di lunghezza.

Nelle prime l' apice di vegetazione non ha la forma ordinaria di cono ma di cuneo; il punto vegetativo trasformerebbesi cioè in linea vegetativa, che o rimarrebbe intera o si scinderebbe più tardi in singoli punti. In quest'ultimo caso il comportamento non sarebbe diverso da quello in cui singoli punti vegetativi sorgono contemporaneamente l' uno sovrapposto all'altro, avvolgendosi d' un mantello comune di corteccia.

Nell' uno come nell' altro caso la presenza di più cilindri centrali, immersi in un parenchima fondamentale, non autorizza a ritenere col SORAUER la fasciazione come p a t o l o g i c a.

Ammessa nelle prime la partecipazione di un tratto abbastanza lungo di lama legnosa, questa o rimane isolata nel mezzo, interposta fra due lamelle di libro, o più raramente si risolve in due piastre parallele, ad estremi convergenti ed aventi nel mezzo una striscia di tessuto fondamentale che simula un tessuto midolliforme.

In tal modo floema e xilema si ritroverebbero come nel fusto sullo stesso raggio. Quindi la differenza tra fasci caulinari e radicali, fondata sulla distribuzione delle due parti del fascio,

in quelli secondo un raggio, in questi secondo raggi diversi, avrebbe per le radici fasciate una certa restrizione.

Lo sviluppo notevole del tessuto midollare nei fusti (*Scrofularia, Lithospermum*) e del midolliforme nelle radici stabilisce un'altra correlazione tra le fasciazioni degli uni e delle altre, la quale cessa però per le radici fasciate delle Dicotiledoni.

Difatti lo stato dianzi accennato è provvisorio o, per meglio dire, limitato alla regione basilare di queste radici. A partire da essa, la lama legnosa, unica o doppia, si risolve in singole piastre, tendenti a forma e disposizione regolari e che rispetto a quelle del fusto offrono differenze profonde. Il tipo di fascio essendo diverso nel fusto e nella radice, si comporta anche diversamente nelle fasciazioni dell'uno e dell' altra: nel fusto esso tende a conservare la forma propria, nella radice s'inizia con forma diversa ma tende in ultimo verso quella definitiva. La presenza, infatti, alla base della radice d' una piastra unica di legno, interposta fra due di libro, fa riferire il fascio al tipo anticribrale, da cui passa gradatamente a quello radiale.

Comune è, però, la tendenza in fusti e radici ad arrotondare i contorni dei fasci per il fatto che essendo questi distribuiti su di una linea non circolare ma ellittica, si sviluppano nel senso tangenziale piuttosto che in quello radiale. Per tal modo il libro risente molto più che il legno di tale sviluppo tangenziale, rimanendo esso limitato in forma di archi fra le piastre legnose delle radici e di semilune depresse su quelle dei fusti.

Altra tendenza, originatasi dalla precedente, si riferisce non più alla forma ma alla distribuzione delle piastre legnose secondo una ellisse più o meno schiacciata. In conseguenza di simile orientazione, le piastre, per non convergere nel senso dell' asse minore della sezione l' una contro l' altra ed incontrarsi con le basi, alternano queste, secondo raggi diversi, in modo da utilizzare meglio lo spazio in senso radiale. Fanno eccezione le sole piastre polari, disposte cioè agli estremi dell'asse maggiore della sezione trasversa, a causa del loro sviluppo nel senso stesso di quello.

Più tardi, movendo dalla base all' apice, nelle radici s'inizia lo stato secondario, per cui si compie la fusione delle singole piastre legnose o l' arrotondamento dei contorni loro per effetto della formazione di legno secondario, che si addossa al primario. Nei fusti fasciati i singoli fasci si fondono in un anello unico, in cui legno e libro continuano a svilupparsi con la tendenza accennata.

Se, però, la forma iniziale di piastra unica, disposta secondo l' asse maggiore della sezione, si conserva, senza risolversi in altre singole, il legno secondario, addossandosi ad essa, vi procede d'ambo i lati parallelamente, terminando alla periferia con i vasi più larghi. A questo modo il legno offre la sezione di un rettangolo più o meno regolare, con orli frangiati o forati per la presenza di vasi più larghi.

Lo stato secondario nelle radici fasciate si compie non in tutta la lunghezza, ma preferentemente verso la base. Per fusti fasciati non soccorrono le notizie bibliografiche, ma havvi ragione per ritenere ch' essi non debbano diversamente comportarsi.

Il passaggio allo stato secondario può essere affrettato od in parte modificato da cause perturbatrici, come ad es. dal destarsi di lacune in seno alla corteccia od al cilindro centrale.

Riassunto. L' esposizione comparativa dei caratteri della fasciazione caulinare e radicale, per quanto l'una può compararsi all'altra, permette di distinguere gli stessi in comuni e specifici:

Caratteri comuni: fasciazione piana, anulare e spirale, schizostelia, estinzione dell'apice per eccesso d'ipertrofia, sviluppo notevole del midollo, particolari disposizioni meccaniche.

Caratteri specifici dei fusti: tendenza ereditaria (per semi) e individuale (per gemme, che trasmettono la fasciazione dagli assi primari ai secondari), predominio di gemme fiorifere e di fiori unisessuali, fillotassi aberranti, linee a pettine.

Caratteri specifici delle radici: polimorfia più spiccata, rizotassi ridotte, variazioni nel tipo radiale del fascio.

RELAZIONI FRA RADICI FASCIATE E FITTONI

Per tali relazioni merita anzitutto un breve cenno la legge delle superfici libere, formulata dal BERTRAND (1) in questi termini:

« Lorsque des productions secondaires tardives se forment dans un organe, elles sont toujours dues à l'activité d'une zone génératrice à eloisonnements tangentiels dépendante d'une surface libre naturelle ou accidentelle, réelle ou virtuelle. Par surface libre dans la plante j'entends : 1° la surface du corps de la plante ; 2° la surface limite de ses cavités intérieures, lacunes, déchirures, méats, et plus généralement de toute solution de continuité de ses tissus, qu'elle soit naturelle ou accidentelle, qu'elle soit ou non en communication avec l'air extérieur ; 3° par extension, la surface limite d'un tissu modifié ou écrasé, la surface d'une cellule cristallogène, celle d'un sclérite ou d'un vaisseau plein d'air, de gomme ou de résine, une paroi cuticularisée, et plus généralement la surface de tout tissu, fût-il réduit à une seule cellule, à une paroi cellulaire, où la vie se ralentit, ne serait-ce même que temporairement, alors que les tissus voisins continuent à être très actifs. On sait depuis longtemps que, lors que des éléments où la vie est ralentie ou éteinte sont en contact avec un tissu où la vie est très active, ces derniers tendent à s'isoler des premiers, il s'établit entre les deux tissus une zone génératrice qui entoure les éléments où la vie s'éteint, qui les isole et les sépare ; ce sont ces zones isolantes qui donnent naissance aux produits secondaires tardifs. » Questo concetto vien seguito dall' autore ed illustrato con esempi relativi.

Secondo BERTRAND lo strato meristematico si comporterebbe come un cambio per il fatto che esso produce del sughero fra la superficie libera e sè stesso, sicchè tutti gli altri tessuti posti tra la superficie libera ed il sughero sono condannati a perire. Dalla parte opposta il meristema produce del tessuto

secondario fondamentale e, se l'attività sua dura più a lungo, una parte del tessuto secondario fondamentale diventa zona secondaria cambiale, la quale verso la superficie libera può formare del floema e dalla parte opposta xilema.

Nei casi da noi osservati l'attività di questo meristema era abbastanza grande verso la base del taglio od in prossimità immediata dell' incisione, ma non risultava mai così intensa come il Bertrand ammette. E se anche in certi casi la zona di tessuto nuovo, derivato dall' attività del meristema in discorso, acquista uno spessore rilevante, pure la formazione di nuovo floema e nuovo xilema si verifica soltanto verso l'apice radicale, per attività del tessuto fondamentale, che nei coni vegetativi è certo molto più grande che altrove.

In genere le nuove pareti divisorie si formano nei tessuti, lesi per azioni traumatiche o per infezione di parassiti, parallelamente alla superficie della ferita oppure a quella degli elementi ad attività rallentata o spenta. Tali processi di proliferazione sono più frequenti nella corteccia, ma non mancano nel cilindro centrale, chè anzi in quest' ultimo è costante la tendenza a dar forma regolare a quei cordoni ancora informi di tessuto, sorti appena da processi così attivi di rigenerazione.

Costante essendo la tendenza nell' endoderma a chiudere il cilindro centrale da quella parte, in cui questo ha perduto la sua integrità, si può dire che questa guaina di difesa sia effettivamente la prima a formarsi nel cambio di ferita o meristema testè accennato, tanto da rispondere in realtà al nome datole dagli anatomi tedeschi. Sol quando l' endoderma ha chiuso il cilindro centrale, si completano nell' interno ed all'esterno di esso i tessuti del floema, dello xilema e della corteccia.

Tali processi di rigenerazione e d' isolamento sono alle volte così energici da farsi risentire anche a distanza. Così avendo l' osservazione mostrato che erosioni nella zona periferica della corteccia si trasmettono fino al cilindro centrale e ne determinano in qualche caso la scissione, si volle, con l' esperienza,

provare se l'incisione longitudinale della corteccia, non seguita, ben inteso, da alterazioni della stessa o da lesione del cilindro centrale potesse determinare la scissione di questo. Le prove svelarono nel fatto come in simili casi il cilindro centrale, si scinda oppur no in parti eguali, tende costantemente a far assumere forma e contorni regolari a queste parti.

Nel caso della incisione longitudinale dei fittoni, il processo, se non avversato da altre cause, si svolge rapidamente e conduce alla scissione abbastanza regolare del cilindro centrale; se invece la corteccia viene ad essere erosa in conseguenza di azioni estranee, allora l' isolamento dei cilindri centrali procede in modo lento, poichè, prima che i cilindri parziali raggiungano forme regolari, la radice sottostà a vicende curiose, per cui, seguita in sezioni trasversali, presenta figure strane ed irregolari, tanto diverse dalla circolare.

In conseguenza della incisione longitudinale delle radici primarie, si desta non di rado quel processo di rigenerazione designato dai botanici e selvicultori tedeschi col nome di « Ueberwallung » per le piante arboree. I lembi estremi della ferita, formati dall' epidermide e dalle cellule corticali sottostanti si arrollano a spirale verso l' interno, lasciando fra loro una lacuna in forma di cuore. Tale processo somiglierebbe solo per la forma quello dianzi citato, ma non sarebbe, come questo, prodotto dall' attività del cambio, poichè di solito la chiusura delle incisioni si compie per allungamento in forma di clave delle cellule limitanti la ferita.

Riguardo poi al comportamento microchimico degli elementi delle radici castrate od incise, quand' essi sono suberificati e vengono trattati con acido solforico concentrato, si imbruniscono gradatamente senza sciogliersi o perdere i loro contorni.

Con la suberificazione coincide abbastanza frequentemente la presenza di una sostanza gialla, che si potrebbe ritenere come gomma di difesa, se corrispondesse per le reazioni a quella da alcuni autori e specialmente dal PRAEL (42) così designata.

Questa sostanza si trova tanto negl' intercellulari quanto ancora ad impregnare le pareti ed il lume delle cellule.

Sezioni trasversali di radici, che presentano parecchi strati periferici di tali cellule oppure gruppi più o meno estesi di simili elementi situati nella zona corticale, trattate con acqua, alcool, etere, a temperatura ordinaria od a quella d' ebollizione per breve o per lunga durata, si conservano intatte, senza cioè che la sostanza in questione subisse alcun cambiamento nel suo aspetto e carattere microchimico.

L' acido solforico concentrato o la potassa caustica fanno imbrunire la stessa sostanza senza però discioglierla interamente.

Floroglucina ed acido cloridrico impartiscono a membrane così impregnate una colorazione rossastra come se fossero membrane lignificate. Sorprende anzi come le pareti degli elementi, i cui intercellulari si presentano così ripieni, svelano pure la colorazione rossastra.

Con clorato potassico e acido nitrico la sostanza non si scioglie neppure dopo una digestione di parecchie ore, però la colorazione bruna passa gradatamente ad una più chiara, quasi paglierina. Se dopo tale trattamento si ritorna a quello con floroglucina e acido cloridrico, la sostanza riprende quasi immediatamente la primitiva colorazione gialla o giallo-bruna; però le pareti, che col trattamento di macerazione hanno perduto buona parte della lignina, mostrano la colorazione in violetto, caratteristica delle membrane lignificate.

La reazione, raccomandata dal Prael e riferibile appunto alla gomma di difesa non dà neppure risultati decisivi. Secondo tale reazione, prima impiegata dal Temme (47), dovrebbe la gomma di difesa, dopo un quarto d'ora di digestione in clorato potassico e acido cloridrico, sciogliersi in alcool oppure nel liquido stesso di macerazione, prolungando in questo la durata dell'immersione dei tagli. Tale reazione non produce però sulla sostanza in questione alcun sensibile cambiamento, astrazione fatta da una leggera chiarificazione.

In confronto al comportamento col liquido di macerazione dello Schulze, la reazione del Temme ha dunque un'azione meno energica. Come nella prima, però, la sostanza in questione riprende il suo primitivo colore trattandola con floroglucina ed acido cloridrico, senza che le pareti, da cui era stata sottratta la lignina, presentino la reazione tipica di questa.

La sostanza mostra, dunque, contemporaneamente la reazione del legno e del sughero, senza però lasciarsi identificare per una di queste due. Ad ogni modo essa differirebbe da quella sostanza gialla o rifrangente la luce osservata dal Klinge (24) tanto nelle cellule corticali delle radici di mais, quanto ancora in quelle di molte Graminacee e Ciperacee.

Tale sostanza, da noi senz'altro designata col nome di gomma di difesa, se non corrisponde alle reazioni caratteristiche del Prael e del Temme, deve senza dubbio avere l'identica importanza fisiologica, poichè l'abbiamo riscontrata specialmente in prossimità delle superfici messe a nudo in conseguenza di tagli o d'incisioni, sia trasversali che longitudinali.

Nei casi in cui essa riscontrasi in cellule limitanti le lacune destatesi nelle radici fasciate o in gruppi più o meno estesi del tessuto corticale o del cilindro centrale, l'importanza fisiologica dev'essere senza dubbio identica a quella testè accennata.

Quando le lacune hanno per effetto di scindere i cilindri centrali parziali di uno primitivo, la suberificazione degli elementi confinanti la lacuna è quasi costantemente seguita dalla presenza della gomma di difesa, la quale, a conforto della nostra asserzione, si riscontra anche al di là dei limiti immediatamente prossimi della lacuna, quand'essa è cieca, oppure al solo limite inferiore quando in basso la lacuna è aperta e conduce alla scissione dei cilindri centrali della radice fasciata.

Diremo in ultimo che, secondo le recenti indagini del Will, la gomma del legno di difesa sarebbe analoga alla bassorina e deriverebbe da una secrezione del plasma, che tappezza l'interno della parete e costituisce il cosiddetto s t r a t o b a s s o r i n o g e n o.

CENNO SINTETICO

Le ricerche fin qui esposte permettono di poter distinguere la fasciazione degli assi in spontanea e indotta.

La prima, relativa a cause interne, quindi estranee a queste indagini, è frequente nei fusti, rarissima nelle radici primarie, non rara nelle secondarie, in cui può distinguersi una frequenza assoluta ed una relativa: rappresentata la prima dall'8, l'altra dal 50 %, cioè che delle primarie con laterali fasciate metà ne presenta 2-5 e metà una sola per ogni radice.

L'alta percentuale di fittoni con più radici fasciate farebbe considerare la fasciazione come una tendenza insita agli stessi e forse capace, come nei fusti, di trasmettersi ereditariamente. Simile tendenza è ancora più spiccata nelle collaterali, che, sebbene rare rispetto alle seriali, si ritrovano spesso in numero di più sulla stessa ortostica in conseguenza del loro modo di origine. Che la fasciazione spontanea non sia determinata ma soltanto favorita da nutrizione attiva, trova appoggio nel fatto che in genere sono i fittoni più robusti di piante vigorose quelli che più spesso presentano laterali fasciate. Semi di fava, rosi da bruchi, dànno fittoni sottili con radici secondarie specialmente rade alla base e mai fasciate.

La fasciazione indotta, quindi relativa a cause esterne, è promossa direttamente nei fusti da azioni parassitarie o meccaniche, indirettamente nelle radici da quelle traumatiche.

Esclusa, infatti, a priori un'influenza diretta su fittoni, il cui apice venne leso o soppresso, i pochi casi di fasciazione parziale, in fittoncini compressi od incisi radialmente, sono da considerarsi quali eccezioni rarissime.

Esclusi, d'altra parte, i casi non meno rari di fasciate collaterali, la cui formazione dipende dal numero e dalla disposizione delle lame legnose della primaria, quindi da un fatto

del tutto interno, rimangono, nel caso nostro, le cause traumatiche, quindi esterne, come le sole a determinare la fasciazione.

Rispetto all' azione specifica di ognuna di esse, la castrazione è quella che fornisce un contingente tanto più alto di laterali fasciate nonchè di laterali cilindriche, quanto più breve è il tratto di radice primaria rimasto dopo l' asportazione dell' apice. Le altre cause, che tendono a menomare l'integrità dell'apice ancor giovane, conducono del pari ed in misura diversa alla fasciazione; quelle, invece, che, rispettando l'incolumità della primaria, menomano o sopprimono le secondarie, sono indifferenti per la fasciazione. Occorre, però, che in tutti i casi la superficie lesa della radice primaria callifichi o si rigeneri prima che processi patogeni ne affrettino il deperimento.

Non altrimenti va intesa l' azione della pressione, la quale se, nelle esperienze nostre, mai condusse direttamente alla fasciazione, pure non ne sembra del tutto estranea, se si giudica da alcuni casi spontanei di perforazione tangenziale dei tegumenti seminali di fava, in cui le radici, penetrate cilindriche, ne uscivano fasciate. La considerazione, anzi, di questi casi fa pensare che solo una pressione lieve, ma progressiva e continua sui coni vegetativi, paragonabile, per altro verso, agli effetti dell' azione lenta di parassiti, possa indurvi trasformazioni identiche a quelle compiutesi in apici vegetativi fasciati.

Il numero delle secondarie fasciate è in relazione diretta con quello delle cilindriche, le cui medie per ogni centimetro di lunghezza dei fittoni castrati sono tanto più elevate quanto maggiore il numero delle fasciate per fittone.

Intanto che ricerche microtomiche mirano a studiare il comportamento dei relativi meristemi apicali, si può per ora ritenere che la fasciazione delle radici secondarie sia dovuta per lo più ad una modificazione iniziale dell' apice, il quale assume la forma di cuneo invece che l' ordinaria di cono; quella dei fusti ad una modificazione successiva dello stesso, che dalla forma conica suole passare a quella di cuneo.

Quanto al comportamento specifico delle Mono- e Dicotiledoni, le prime danno fasciate collaterali, le altre seriali, riferendoci alle radici di mais e fava quali rappresentanti tipiche.

Una prevalenza così esclusiva delle une sulle altre sarebbe l' effetto della più alta poliarchia delle prime rispetto alle seconde. Però anche nelle radici di fava, ed invero di una varietà a semi molto grossi, il numero dei fasci variando, secondo la provenienza dei semi, da 4 a 5 e da 4 fino ad 8, faceva variare parimenti la frequenza delle collaterali.

Ad esprimere in forma sintetica i risultati delle azioni traumatiche, dirette a provocare la fasciazione, presentiamo il seguente prospetto, in cui le medie relative sono messe a riscontro con quella naturalmente presentata da fittoni interi. Non si riportano qui stesso le medie delle secondarie cilindriche per ogni centimetro di lunghezza della primaria, ma si rinvia alle relazioni loro con le fasciate già esposte nelle singole esperienze.

Dei fittoni	castrati a 3	cm. il	37 %	aveva laterali fasciate
«	« 5	«	26	«
«	« 7	«	15	«
«	incisi radialmente		23	«
«	« tangenzial.te		20	«
«	« anularmente		9	«
«	compressi later.te		10	«
«	a radici 2ie soppres.		8	«
«	interi o di controllo		8	«

Questi dati riassuntivi svelano chiaramente l'azione dei mezzi traumatici nell' indurre la fasciazione. Sul loro valore relativo occorre rilevare che quello della media di fittoni interi è superiore all' altro delle medie di fittoni castrati, incisi o compressi, perchè fondato su di un numero più che triplo di elementi costitutivi. Se questi fossero stati uguali nelle singole esperienze ed in quelle di controllo, le medie riferibili alle prime sarebbero venute a modificarsi, come fece quella dei fittoni di controllo.

CONCLUSIONI

L' esame dei risultati finora conseguiti permette di enunciare le seguenti conclusioni d' ordine generale:

1) La fasciazione delle radici secondarie somiglia nei caratteri fondamentali a quella dei fusti. Ne differisce per il fatto che, mentre questi sogliono passare dalla forma cilindrica alla fasciata, le radici si comportano in modo inverso, passando gradatamente dalla forma fasciata alla cilindrica o risolvendosi, per scissione dell' apice, in due o più radici cilindriche.

2) La forma rara di fasciazione dei fusti, detta duplicazione, si riscontra anche nelle radici, anzi è propria delle collaterali. Nelle seriali non è che apparente, poichè se anche queste presentano casi di bipartizione molto regolare, pure le due schizorize differiscono fra loro oltre che dal punto di vista genetico da quello morfologico ed anatomico.

3) Alle fillotassi aberranti dei fusti fasciati corrispondono nelle radici fasciate rizotassi particolari, per cui la formazione delle radici terziarie si compie per lo più non sulle facce piane o curve ma sui margini delle secondarie, cioè in corrispondenza degli estremi dell' asse maggiore della sezione trasversa.

4) La forma più frequente di fasciazione delle radici è la piana. Non mancano, però, l' anulare (se a questa vogliono riferirsi alcuni casi particolari di schizostelia) e la spirale, che, contrariamente a quella dei fusti, si compie più verso la base che verso l' apice delle radici. Spire incomplete si presentano, però, non di rado anche all' apice delle singole schizorize provenienti dalle fasciate.

5) La fasciazione delle radici è nelle Monocotili (*Zea Mays*) più semplice che nelle Dicotili (*Vicia Faba*), essendovi tendenza quasi esclusiva nelle prime alle fasciate collaterali, nelle seconde alle seriali.

6) La fasciazione spontanea sembra, almeno per ora, essere determinata direttamente dallo sviluppo dell' apice secondo un piano longitudinale e indirettamente da favorevoli condizioni di nutrizione.

7) Rispetto alle cause determinanti la fasciazione indotta, valgono per le radici quelle stesse presunte per i fusti. Se non che mentre in questi l' azione di cause parassitarie e meccaniche è diretta, nelle radici l'azione di quelle traumatiche è indiretta, ripercuotendosi dalle primarie alle secondarie.

8) Fra le cause traumatiche, la castrazione delle radici primarie conduce più sicuramente alla fasciazione delle secondarie. Questa è tanto più frequente, quanto più breve la distanza fra il piano d' inserzione dei cotiledoni e quello di asportazione dell' apice radicale.

9) L' incisione radiale dei fittoni, non approfondita sino a spaccare il cilindro centrale, può produrre tanto la fasciazione dei fittoni stessi quanto quella delle radici laterali. Ma come i primi non si conservano a lungo fasciati per la tendenza a bipartirsi verso l' apice, così le laterali fasciate sono meno numerose rispetto a quelle promosse dalla castrazione.

10) La pressione laterale dei fittoncini può produrre, finchè agisce, la loro fasciazione parziale o provvisoria, ma ben di rado quella delle radici laterali.

In natura questa forma di fasciazione indotta rappresenta, certo, una delle più frequenti.

BIBLIOGRAFIA

(I numeri progressivi si riferiscono a quelli citati nel testo)

1. **Bertrand**: Loi des surfaces libres. *Compt. Rend. de l'Acad. d. Sc. Paris. 1884, p. 48.*
2. **Borbás**: Fasciation an Weiden in Folge des Köpfens. *Földmürelési Erdekeink, 1880. p. 248-49* (riferito dall'A. nel *Bot. Centralbl. Bd. III. p. 950*).
3. **Borrich**: De Ranunculo fasciato. *Act. Hafn. 1672, n. 63.* (citato dal Penzig).
4. **Braun**: Das Individuum der Pflanze. *Akad. d. Wissensch. Berlin, 1853, p. 60.*
5. **Bravais**: Essai sur la disposition des feuilles curvisériées. *Ann. d. Sc. nat. 1837, p. 70-72.*
6. **Caspary**: Gebänderte Wurzeln eines Epheustockes. *Schr. d. phys. ökon. Ges. in Königsberg, 1882, p. 1-3.*
   — Eine gebänderte Wurzel von Spiraea sorbifolia. *Ibidem, 1883. p. 30-32.*
7. **Costantin**: Observations sur la fasciation des Mucedinees. *Bull. de la Soc. mycol. de France. T. IV. p. 62-68.*
8. **Cramer**: Ueber die morphologische Bedeutung des Pflanzeneies. Beitrag zur Kritik von Hallier's Phytopathologie. *Bot. Zeitung, 1868, p. 249.*
9. **Cuboni**: Sulla causa della fasciazione nello Spartium junceum e nel Sarothamnus scoparius. *Bull. Soc. bot. it. 1894, p. 281.*
10. **De Candolle M. C.**: Cas remarquable de fasciation chez un sapin. *Archiv. de Sc. phys. et nat. 1889. p. 95.*
11. **Delpino**: Teoria generale della fillotassi. *Genova, 1883. p. 217.*
12. **Del Torre**: Fasciazione caulina nella Scrophularia canina. *Cividale, 1890, p. 1-11.*
13. **Detharding**: De Asparago laticauli observatio. *Miscell. Ac. nat. Cur. 1699-700, p. 31.*
14. **De Toni**: Breve notizia sopra un caso di fasciazione caulina. *Bull. Soc. veneto-trentina di Sc. nat. Padova, 1888. Vol. IV. N. 2.*
15. **De Vries**: Sur les courbes galtoniennes des monstruosités. *Bull. scient. de France et Belgique. T. XXVII, p. 396-418.*
   — Sur l'hérédité de la fasciation. *Bot. Jaarbock. Gent. 1894. p. 110.*
   — Ueber die Abhängigkeit der Fasciation vom Alter bei zweijährigen Pflanzen. *Bot. Centralbl. 1899. p. 289.*
16. **Ernst**: Botanische Notizen aus Venezuela. *Bot. Centralbl. Bd. II. p. 571.*

17. **Fermond**: Note sur une tige fasciée de Cucurbita Pepo. *Bull. de la Soc. bot. de France, 1860, p. 496.*
— Essai de Phytomorphie. *Paris, 1864, T. I. p. 299.*
18. **Frank**: Handbuch der Pflanzenkrankheiten, I. Aufl. *Breslau, 1895, p. 231.*
19. **Gravis**: Les fascies souteraines des Spirées. *Compt. Rend. de la Soc. royale de Botanique de Belgique, 2e partie, 1881, p. 30-35.*
20. **Grevillius**: Ueber eine fasciirte Form von Sideritis lanata. *Bot. Centralbl. Bd. XLVI. p. 219.*
21. **Hanstein**: Beiträge zur allgemeinen Morphologie der Pflanzen. Wehrverfahren gegen Verwundungen und Verstümmelungen. *Bot. Abh. Bonn, 1882, Bd. IV. p. 136.*
22. **Jungner**: Einen Fasciationsvorgang der Berberis vulgaris. *Bot. Centralbl. Bd. XLVI. p. 259.*
23. **Keissler**: Ueber eine Zweigfasciation bei Lonicera caucasica. *Verh. d. zool. bot. Ges. in Wien, 1899, p. 245.*
24. **Klinge**: Gramineen- und Cyperaceenwurzeln. *Mém. de l'Acad. imp. de S. Petersbourg, VII Série, T. XXVI. N. 12.*
25. **Kny**: Ueber den Einfluss von Zug und Druck auf die Richtung der Scheidewände in sich theilenden Pflanzenzellen. *Pringsheim's Jahrb. Bd. XXXVII. p. 55.*
— Ueber den Einfluss des Lichtes auf das Wachsthum der Bodenwurzeln. *Ibidem, Bd. XXXVIII. p. 421.*
26. **Kronfeld**: Studien zur Teratologie der Gewächse. *Verh. d. zool. bot. Ges. in Wien, 1886, p. 19.*
27. **Linnaei**: Philosophia botanica. *Vienna, 1755, p. 216.*
28. **Lopriore**: Regeneration gespaltener Wurzeln. *Nova Acta der K. Leop. Carol. Deutsch. Akad. der Naturforscher, Bd. LXVI, 1896, p. 211-286.*
— Regeneration gespaltener Stammspitzen. *Ber. d. deutsch. bot. Ges. 1892, p. 76.*
29. **Magnus**: Eine schöne Fasciation von Berberis vulgaris. *Sitzber. d. bot. Ver. d. Prov. Brandenburg, Bd. XVIII, 1876, p. 11-12.*
— Fasciationen von Campanula persicifolia. *Ibidem, p. 12.*
— Fasciation bei Ranunculus bulbosus. *Ibidem, Bd. XX. p. 64.*
30. **Masters**: Vegetable Teratology. *London, 1869, p. 11-21.*
31. **Maxvel**: Teratology (deutsch von Udo Dammer). *Leipzig, 1886, p. 35.*
32. **Meehan**: The law of fasciation and its relation to sex in plants. *Proced. of amer. assoc. for science (Botany). New York, 1872, p. 276.*
33. **Mezzana**: Sopra un caso di fasciazione nel fusto di Cucurbita Pepo. *Bull. Soc. bot. it. 1899, p. 268.*

34. **Michelis**: Ueber Fasciation von Taraxacum. *Bot. Zeitung, 1885, p.440-41.*

35. **Molliard**: Revue des travaux de tératologie et de pathologie végétales. *Rev. gén. de Botanique, T. VII. p. 466.*

— Cas de fasciation d'origine parassitaire. *Ibidem, T. XII. p. 326.*

36. **Moquin-Tandon**: Eléments de Tératologie végétale. *Paris, 1841, p. 151-52.*

37. **Mottareale**: Su di un caso di fasciazione spirale nel Linum strictum. *Riv. di patol. veg. Vol. VIII. p. 325.*

38. **Nêmec**: Ueber den Einfluss der mechanischen Factoren auf die Blattstellung. *Bull. internat. de l'Acad. d. Sc. de Bohême. Prague, 1903, p. 1-14.*

39. **Nestler**: Ueber Ringfasciation. *Verh. d. Akad. d. Wissensch. Wien, 1894, p. 16.*

— Untersuchungen über Fasciationen. *Oesterr. Bot. Zeitschr. Bd. XLVI, 1891, p. 374.*

40. **Penzig**: Pflanzenteratologie. *Genova, 1890.* (consultato per la letteratura).

— Sopra una fasciazione singolare del cavolfiore. *Malpighia, 1900 p. 49.*

41. **Peters**: Beiträge zur Kenntniss der Wundheilung etc. *Göttingen, 1897.*

42. **Praël**: Vergleichende Untersuchung über Schutz-und Kernholz. *Ber. d. deutsch. bot. Ges. 1887, p. 417-22.*

43. **Prantl**: Ueber die Regeneration des Vegetationspunktes an Angiospermenwurzeln. *Abh. d. Würzburg. bot. Instituts, Bd. I. Heft 4. Leipzig, 1874.*

44. **Russell**: Observations sur quelques cas de fasciation. *Bull. Soc. bot. de France, 1894, p. 86-7.*

45. **Rettig**: Ueber eine interessante Fasciation von Cucurbita Pepo. *Verh. d. bot. Ver. d. Prov. Brandenburg, Bd. XV. 1873, p. 27.*

46. **Sorauer**: Pflanzenkrankheiten, II. Aufl. *Berlin, 1886. Bd. I. p. 270.*

47. **Temme**: Ueber Schutz-und Kernholz. *Thiel's Landw. Jahrb. 1885. p. 455-84.*

48. **Van Tieghem**: Racines doubles et bourgeons doubles des Phanérogames. *Journal de botanique, 1877, p. 19.*

49. **Will**: Beiträge zur Kenntniss des Kern-und Wundholzes. *Bonn, 1899.*

Mycetes siculi novi[1]

Dr. G. SCALIA

Myriostoma coliformis (Dicks.) Corda. C. G. Lloyd: The Geastrae pag. 6. fig. 1-4; sub *Geaster coliformis* Pers., De Toni: Sylloge Fung. VII. p. 73; *Lycoperdon* Dicks.

In contrada Pompeo, presso Mascalucia, nello scorso ottobre raccolsi un unico esemplare, disgraziatamente un poco guasto ma perfettamente riconoscibile, di questa elegantissima specie che fin oggi non era stata rinvenuta in Italia.

Per l' Europa questa specie era riportata di Inghilterra (molto rara), Olanda, Germania, Polonia e Ungheria (frequente): si conosceva anche del Capo di Buona Speranza e dell' isola Socotra (Sacc. Syll. XII. p. 954). Più recentemente è stata poi raccolta nell' America e precisamente nel Colorado, nel Dakota e nella Florida dov' è frequentissima (Cfr. C. G. Lloyd: *The Geastrae*, p. 7).

Sclerotiopsis sicula Scalia n. sp.

Stromatibus oblongis, parum prominulis, aterrimis, seriatim dispositis e matrice mutata constitutis: peritheciis profunde immersis, irregulariter lenticularibus, astomis, 700-780 μ latis, μ 80-120 altis, solitariis, contextu tenui, indistincte olivaceo, parenchymatico; basidiis cylindraceis, brevibus, circ. 10-12 μ longis, dense constipatis, ambitum totius cavitatis obtegentibus, hyalinis: sporulis copiosis, oblongis vel oblongo-lanceolatis 9-11 $\times$ 3-3.5, continuis, hyalinis, eguttulatis vel sed spurie 2-guttulatis.

Sopra rametti aridi, disseccati, si presentano delle macchie nere, prominenti, lucide simulanti quasi una Dotidacea. Lo stroma lenticolare, piano-convesso, oblungo, è costituito dai tessuti dell' oste alquanto alterati; esso è limitato verso l' esterno da una zona formata di 2-3 piani di cellule corticali, verso l' interno il limite dello stroma è dato da alcuni piani di cellule floematiche anch' esse annerite.

(1) I Series, in « *Rendiconti del Congresso botanico di Palermo*, maggio 1902 ».

Nel mezzo di questo stroma particolare e seguendone la forma si ha quasi sempre un gran peritecio che misura 700-780 μ in larghezza, 80-120 in ispessore. Il peridio, di colore debolmente olivaceo, è costituito da pochissimi piani di elementi poliedrici e molto stirati tangenzialmente: esso è tappezzato uniformemente da uno strato fertile esile, parenchimatico, incolore, dal quale si elevano, irraggiando verso la cavità periteciale, numerosi basidii brevi, cilindrici, jalini e fascicolati. All'estremità di questi basidii si formano le spore, le quali si mostrano prima come minuti rigonfiamenti vescicolari mentre più tardi, giunte a maturazione, sono oblunghe od oblungo-lanceolate, semplici, jaline e misurano 9-11 μ in lunghezza, 3-3.5 in ispessore; hanno la parete sottile, sono ripiene di plasma granuloso e sfornite di gocciole, alcune, mentre altre presentano regolarmente due goccioline verso gli estremi.

A nessuna delle poche specie di questo genere ho potuto riferire il mio materiale; ho creduto quindi opportuno istituire questa nuova specie.

Habitat: in frustulis exsiccatis, aridis? *Anagyridis foetidae*, Randazzo, Majo 1897 (Legit † M. Fusaja).

? Sclerotiopsis Pelargonii Scalia n. sp.

Peritheciis globoso-conicis, basi saepeque applanatis, in petiolis foliorum oblongis, aterrimis, nitidulis, astomis, parenchymati immersis, ac epidermide atrata tectis, prominulis, 520-630 μ latis, denique erumpentibus; contextu parenchymatico subatro, circ. 18 μ crasso, e cellulis minutis, dense aggregatis formato: basidiis filiformibus, hyalinis 18-20 μ longis, monosporis, dense constipatis e strato proligero tantum basi perithecii evoluto hortis; sporulis inaequalibus ac fere semilunaribus, utrinque acutatis, plasmate nubiloso quandoque minute guttulato farctis, hyalinis, 8-11 μ long., 1.5-2 μ crassis.

Sviluppasi sul lembo e sul picciuolo delle foglie di *Pelargonium* sp. e si manifesta sotto forma di tubercoletti nerissimi, semiglobosi sul lembo, oblunghi sul picciuolo, e prominenti. I peritecii sono immersi, chiusi, e, in tutti gli esemplari da me osservati, costantemente ricoperti dall'epidermide annerita. Il contesto parenchimatico, nerastro, è dato da cellule poliedriche. Lo strato fertile, da cui si originano i basidii filiformi, jalini, è sviluppato soltanto alla base del peritecio; per questa ragione e per la mancanza di un vero stroma riferisco la specie, non senza qualche incertezza, al genere *Sclerotiopsis*. Le spore numerosissime riempivano nei peritecii sezio

nati l' intiera cavità, mostrandosi sotto forma di una massa quasi olivacea, mentre in realtà sono jaline. Queste spore vengono disperse col dilacerarsi del peridio: tenendo a lungo il materiale in ambiente umido, l' acqua assorbita fa rigonfiare la massa delle spore che esercita per ciò una forte pressione sulla parete; a certo punto questa si rompe irregolarmente e le spore vengono messe in libertà. Le spore sono sublanceolate ma per lo più semilunari e si originano solitarie all' estremità di ciascun basidio, esse misurano 8-11 μ di lunghezza. 1.5-2 di spessore, hanno un episporio sottilissimo e sono ripiene di plasma nubiloso, fornito qualche volta di minutissime goccioline di grasso.

Habitat: in foliis exsiccatis *Pelargonii* sp., Mascalucia, Majo 1903 (Ipse legi).

Diplodia spiraeina Sacc. Reliqu. Libert. IV, n. 139; Syll. III, p. 342.

Peritheciis sparsis vel gregariis, primum sub cortice nidulantibus deniqne erumpentibus, saepius seriatim dispositis, atris, oblongo-depressis, usque 350 μ longis, μ 240-250 latis, 130-140 μ altis; contextu olivaceo-fuligineo, parenchymatico e cellulis polygonalibus composito; sporulis oblongis vel fere obovatis, aequalibus sed non rare inaequalibus, primum continuis, hyalinis, plasmate granuloso farctis, postea flavidulis denique, maturitate, castaneo-umbrinis, medio septatis, non vel vix constrictis, 18—21×9—10, impellucidis, loculis obscure 1-guttulatis quandoque eguttulatis; basidiis brevibus, circ. 10 μ longis, cylindraceis vel saepeque papillaeformibus, hyalinis.

Riferisco alla specie del Saccardo gli esemplari da me raccolti e sui quali estesi la presente diagnosi, perchè concordano abbastanza bene i caratteri delle spore e dei basidii. Differisce il mio materiale dalla specie soltanto per i peritecii non distintamente globulosi e per la forma variabile delle spore. Accanto alle spore oblunghe ve ne sono di quasi obovate, e mentre le prime misurano 18 — 21 × 9 — 10, le seconde sono più tozze e misurano 20×14 μ. L'essere o il non essere le spore guttulate non costituisce un carattere differenziale del quale si debba tenere molto conto; anche qui di fatti, come in altre specie, mentre in alcuni peritecii tutte le spore sono distintamente guttulate, in altri nessuna o quasi. In alcune spore le gocciole sono bene visibili, in altre si scorgono solo dopo che il preparato abbia subita una certa pressione.

Queste gocciole cominciano a comparire nelle spore quando queste sono vicine alla maturazione, mai se ne incontrano nelle giovani

spore in via di formazione e di accrescimento; in questi stadii il protoplasma presentasi sempre uniformemente granuloso.

Questa specie è nuova per la Flora italiana, essendo stata rinvenuta fin ora soltanto in Germania ed in Francia.

Habitat: in ramulis exsiccatis *Spireae ulmariae*. Istituto agrario siciliano Valdisavoja. Cibali (Catania), Aprili-Majo 1903 (Ipse legi).

Robillarda Celtidis Scalia n. sp.

Peritheciis majusculis, globoso-depressis, 240 — 270 μ diam., gregariis, sub cortice nidulantibus denique erumpentibus, ostiolatis; contextu parenchymatico, olivaceo-fuscidulo, circa ostiolum subatro, e cellulis polygonalibus depressis formato; stratu proligero totum ambitum perithecii obtegente; sporulis oblongo-fusoideis, sursum parum attenuatis basique rotundatis, 17 — 21 × 4 — 5, hyalinis vel dilutissime chlorinis, medio septatis, non constrictis, apice 2-3 setis indistinctis, filiformibus gerentibus, e basidiis filiformibus, quam sporulas circiter dimidio brevioribus, hortis; paraphysibus hyalinis, filiformibus, 40 — 45 μ longis, rectis vel flexuosis, minutissime pluriguttulatis, eseptatis intermixtis.

Presentasi sotto forma di macchiette nerastre un poco prominenti sui rametti aridi, disseccati. I peritecii subcorticali sono a lungo ricoperti dell' epidermide non nigrificata, più tardi col dilacerarsi di questa vengono allo scoperto; sono globosi oppure globoso-depressi e spesso gregarii. Il peridio parenchimatico, quasi olivaceo, eccetto attorno all' ostiolo dov' è nerastro, è formato da cellule poliedriche stirate alquanto tangenzialmente. La cavità periteciale è tappezzata da un abbondante strato proligero parenchimatico ad elementi minutissimi e quasi indistinti. Da questo strato si elevano numerosi basidii filiformi brevissimi alla cui estremità si formano le spore, oblungo-fusoidee o quasi obclavate, portanti all' estremità 2-3 setole divaricate, filiformi ed appena percettibili, lunghe su per giù come le spore e meglio visibili nei preparati rimasti all' asciutto. Le spore sono prima continue e jaline, più tardi diventano bicellulari, per la formazione di un setto mediano in corrispondenza al quale non presentano restringimento alcuno: isolate sono jaline o debolmente clorine, nell' insieme formano una massa quasi olivacea.

Dallo strato fertile si ergono, tra i basidii, delle parafisi filiformi esilissime, lunghe 40-45 μ, jaline e minutamente guttulate;

queste parafisi non sono mai molto numerose, ma costanti in tutti i periteci.

Delle poche specie fin ora note, appartenenti a questo genere, soltanto *Robillarda discosioides* Sacc. et Berl. e *R. Cavarae* Tognini presentano qualche affinità con la nostra.

La *R. discosiodes* però ha i peritecii molto appianati e le sue spore ovoideo-fusoidee, molto assottigliate verso l'apice, portano un'unica setola e sono di dimensioni diverse dalle nostre (14 × 3-4).

Affinissima, e forse identica alla nostra, è la *R. Cavarae* del Tognini, raccolta su corteccia di melo. Corrispondono perfettamente i caratteri e le dimensioni delle spore (18-20 × 4-5 μ nella *R. Cavarae*), ma le nostre portano 2 o 3 setole e non 3 o 4. Il Tognini poi nella diagnosi della sua specie parla di basidii filiformi, lunghi 40—50 μ; questi basidii fanno pensare molto ai filamenti sterili da me osservati, ma non ho potuto decidere circa la identità delle due specie non avendo a mia disposizione alcun esemplare di *R. Cavarae*.

Habitat: in ramulis exsiccatis, dejectis, *Celtidis australis*, Catania, Aprili 1903 (Ipse legi).

Hendersonia Celtidis australis Scalia n. sp.

Peritheciis globoso-depressis, sub cortice nidulantibus denique erumpentibus, μ *310 — 350 latis, 170 — 210* μ *altis, sparsis vel 2-confluentibus; contextu tenui, fuligineo, parenchymatico; sporulis oblongis, saepius inaequalibus, utrinque late rotundatis, 3-septatis, ad septa parum vel nec constrictis, primitus continuis, hyalinis, postea 1-septatis chlorinis, loculis guttulatis, denique maturitate castaneo-fuligineis 13.5 — 18 × 5 — 6, 3-septatis, eguttulatis; basidiis hyalinis, teretibus,* μ *10 — 12 longis suffultis.*

Periteci sparsi o subgregarii, prominenti, puntiformi, brunastri, frequenti per lo più in prossimità dei nodi, prima ricoperti dal sughero, poi erompenti, globoso-depressi.

Il peridio è formato da cellule minute poliedriche e di colore fuligineo-fosco. Le spore numerose formano nella cavità del peritecio una massa fuliginea, isolate sono invece fosche e si presentano oblunghe, largamente arrotondite ai due estremi, diritte ma per lo più inequilaterali od anche un poco ricurve, spesso rigonfiate all'apice e alquanto assottigliate verso la base, 3-septate, con logge eguttulate e uniformemente colorate, quasi sempre un poco strozzate in corrispondenza ai setti od anche liscie.

Queste spore si originano all'estremità di basidii filiformi, jalini, radianti da un parenchima fertile che tappezza tutta la parete del peridio e si presentano dapprima semplici, jaline e ripiene di protoplasma granuloso, poi 1-septate di color subolivaceo e colle logge monoguttulate, finalmente 3-septate bruno-fuliginee eguttulate.

La nostra specie non ha niente di comune con *H. Celtidis* Ell. et Ev., raccolta sopra rametti di *Celtis occidentalis* nell' America settentrionale, avendo questa le spore gialle 3-7-settate, mentre nella nostra le spore sono brune e costantemente 3-settate.

È diversa da *H. celtifolia* Cooke per le spore non clavate e più piccole. È affine a *H. sarmentorum* West. dalla quale è per altro bene distinta per i periteci non appianati e per le spore mai ellissoidali.

Habitat: in ramulis exsiccatis aridis *Celtidis australis*, Catania, Aprili 1903 (Ipse legi).

Stagonospora macrospora (Dur. et Mont.) Sacc. Syll. III, p. 450.

Septoria macrospora Dur. et. Mont. Syll. p. 277; *Hendersonia piptarthra* Sacc. Mich. II, p. 111; *Hend. Montagnei* Cooke.

Amphigena, peritheciis immersis pachydermis, globosis, atris, epidermide tectis; sporulis maximis, cylindraceo-subclavatis, 3-5-septatis, 60 — 70 × 10 — 12, articulis tandem solubilibus, v. saltem 3-4-nucleatis, subhyalinis.

Obs: In exemplare meo sporulae vere majores, usque 100 μ. longae, 10-14 μ. latae.

Ho riferita la diagnosi del Saccardo (Syll. l. c.) che concorda assai bene col materiale da me osservato: questo in vero si discosta alquanto dal tipo per le maggiori dimensioni a cui possono giungere le spore, 60 — 100 × 10 — 14; trattasi però indubbiamente della stessa specie.

Questa specie è nuova per la Flora italiana, essendo stata rinvenuta sin ora soltanto in Algeria (Durieu) e in Francia (Roumeguère).

Habitat: in foliis exsiccatis vel languidis *Agaves americanae*, S. Placido Calonerò, Scuola Agraria, Majo 1903 (Ipse legi).

Septoria Caryophylli Scalia n. sp.

Maculis irregularibus, elongatis, in caulibus exsiccatis subochraceis, linea fusca vel fuscidula cinctis, in foliis distincte ochraceis irregularibus vel ellipsoideis, in utraque pagina foliorum elevatis ac linea purpureo-fusca marginatis; peritheciis copiosissimis, irregulariter sparsis, saepeque confluentibus, atris, punctiformibus, subglobosis vel globoso

conicis, 140 — 170 μ. diam., immersis, ostiolatis ; ostiolis brevibus, papillatis e stomatibus exeuntibus; contextu parenchymatico tenui, olivaceo-fuligineo, circa ostiolum obscuriore; sporulis cylindraceis, utrinque rotundatis 27.5 — 35 × 3 — 3.5, medio septatis, non constrictis, ex hyalino dilutissime olivaceis, pluriguttulatis.

La nostra specie è affine a *S. dianthophila* Speg. ma se ne distingue facilmente per il fatto che determina la formazione di macchie; oltre di che i peritecii non sono mai lenticolari e sono di diverse dimensioni; diverse sono pure le dimensioni delle spore.

Differisce da *S. Sinarum* Speg. per le spore non acicolari, mai 2-settate e non strozzate in corrispondenza al setto. Nel mio materiale i periteci non sono mai globoso-lenticolari e sono più voluminosi; le spore anch' esse sono più robuste che nella specie di Spegazzini.

Completamente diversa dalla nostra è *S. dianthicola* Sacc., la quale non forma macchie ed ha le spore molto più esili, continue, eguttulate.

Presenta qualche affinità per le macchie e per i caratteri delle spore con *S. dimera* Sacc. raccolta su foglie di *Silene nutans;* ma nella nostra, come dissi, i periteci non sono mai lenticolari e nelle foglie sono più frequenti sulla pagina inferiore che non sulla superiore.

È diversa da *S. Dianthi* Desm. per le spore distintamente 1-settate, più sottili e pluriguttulate.

La specie che più si accosta alla nostra è *S. Carthusianorum* West., ma le spore fuoriescono nella nostra sotto forma di cirro olivaceo, non roseo-carneo; le spore sono poi variamente guttulate e più robuste.

Habitat: in foliis caulibusque languentibus *Dianthi Caryophylli*, Mascalucia, Octobri 1902 (Ipse legi).

Septoria Solani-nigri Scalia n. sp.

Maculis orbicularibus, sparsis vel confluentibus, amphigenis, albido fuscidulis in pagina superiore foliorum paullum elevatis, fusco marginatis, in inferiore applanatis, linea olivaceo-chlorina cinctis ; peritheciis epiphyllis, minutissimis, fere indistinctis, globosis 70-90 μ. diam., profunde immersis, ostiolo circ. 15 μ. diam., apertis ; contextu tenui, parenchymatico, olivaceo-fuscidulo, circa ostiolum obscuriore ; sporulis filiformibus, rectis vel flexuosis, 20—30 × 0.5—1, indistincte septulatis, utrinque subacutis, minutissime guttulatis, hyalinis.

Sulle foglie languide determina per lo più delle macchie orbicolari, aride, sulla pagina superiore di color bianco-fosco e circondate da una linea alquanto elevata nerastra; sulla pagina inferiore tali macchie sono invece di color foglia morta e sono limitate da una striscia olivaceo-giallastra.

I periteci sono costantemente epifilli e sono appena percettibili ad occhio nudo sotto forma di minutissimi puntini brunastri. Nella sezione si presentano globosi ed immersi per intiero nel mesofillo l'ostiolo circolare, appena papillato, affiora l'epidermide. Il contesto parenchimatico è formato da elementi minutissimi, stirati un poco tangenzialmente; 3 o 4 piani di queste cellule costituiscono il peridio che si presenta di color olivaceo-brunastro, la colorazione è alquanto più intensa negli elementi che circuiscono l'ostiolo. Le spore filiformi, assottigliate verso le due estremità sono variabilissime per forma: ora diritte per lo più invece flessuose, si presentano qualche volta curve, quasi falciformi, misurano 20-30 μ di lunghezza, μ 0.5—1 di spessore, presentano dei setti indistinti e numerose goccioline.

Del genere *Septoria*, così ricco di specie, soltanto cinque ne sono descritte come viventi su diversi *Solanum*: *Sept. Dulcamarae* Desm., *S. Lycopersici* Speg., *S. Pseudo-Quinae* Pat., *S. solanicola* Ell. et Ev., *S. solanina* Speg.

La nostra, che ho creduto di dovere descrivere come nuova è diversa, ora per alcuni ora per altri caratteri, da ciascuna di esse. La *S. Dulcamarae* differisce dalla nostra per avere le spore 3-4-settate e misuranti 50-60×1.7.

La *S. Lycopersici* non presenta affinità alcuna con la nostra; essa di fatti produce grandi macchie occupanti spesso tutta la foglia, i suoi periteci si sviluppano sulla pagina inferiore e le spore in essi contenute sono cilindriche o subclavate, arrotondite alle due estremità, 3—plurisettate e assai più robuste delle nostre, 70-110×3.

La *S. Pseudo-Quinae* è diversa principalmente per le maggiori dimensioni dei periteci e delle spore, le quali misurano μ 50×1.5.

La *S. solanina* non ha niente di comune con la nostra; le macchie che essa forma sono limitate da una zona fosco-purpurea; i periteci lenticolari sono spesso solitari nel centro della macchia; le sue spore sono molto più robuste (μ 40-60 × 2).

Alquanto affine alla nostra per i caratteri delle spore e la *S. solanicola*, raccolta nella California su foglie di *Solanum umbelliferum*:

le macchie che essa produce sono però bruno-pallide, i periteci sono più voluminosi e le stesse spore sebbene abbiano la lunghezza delle nostre pure sono più spesse (μ 20-30 × 1. 5—2).

Habitat: in foliis vivis vel languentibus *Solani nigri*. Scuola Enologica di Catania, Majo 1902 (Ipse legi).

Gloeosporium Beniaminae Scalia n. sp.

Maculis orbicularibus in pagina superiore foliorum castaneo-fuscis vel fusco-purpureis, linea atra, prominula constanter circumscriptis, in inferiore subfuligineis ; acervulis hypophyllis subcirculariter dispositis ovalibus vel oblongis, fulvis, primum epidermide tectis denique, eam dilaceratam, erumpentibus: conidiis suboralibus vel fere globosis, 18-24 × 15.5-17, hyalinis, episporio minute punctulato, plasmate granuloso vel varie guttulato farctis ; basidiis crassis, brevibus, papillaeformibus, hyalinis.

Determina sulle foglie delle macchie circolari di color castagno più o meno scuro sulla pagina superiore, dove sono limitate da una zona nera prominente, di colore fuligineo quasi uniforme sulla pagina inferiore. Tutto intorno a tali macchie si nota un' area decolorata, giallastra, la quale sta ad indicare l' infezione del micelio nel mesofillo.

Sulla pagina inferiore si osservano le fruttificazioni di questo *Gloeosporium* sotto forma di puntini ovali od allungati di color cannella. Nella sezione trasversale si vede come il micelio, jalino, settato, ramoso, invade il clorenchima, serpeggia negli intercellulari senza penetrare mai dentro le cellule che vengono discostate per azione meccanica.

Il contenuto di queste cellule è in parte utilizzato dal micelio, esse difatti si presentano plasmolizzate ed il loro plasma si osserva sotto forma di grumo di color rosso bruno nel centro della cellula. L' epidermide delle due pagine fogliari subisce la stessa alterazione.

Dopo di essersi sufficientemente sviluppato, il fungo si prepara a fruttificare: il micelio si addensa al di sotto dell' epidermide della pagina inferiore e viene a formare come uno stroma dal quale si originano i basidî brevi, papilliformi, portanti conidî quasi ovali o globosi, per mutua pressione qualche volta angolosi. Questi conidî sono jalini hanno l' episporio sottile e punteggiato e sono ripieni di plasma granuloso fornito di gocciole varie di grassi. I basidî e le spore esercitano una forte pressione sull' epidermide fogliare che così viene a rompersi e circonda gli acervuli.

La nostra specie non ha alcuna somiglianza con *Gl. elasticae* avendo questa i conidî ellissoidali o allungati e misuranti μ12-20×5. È diversa da *Gl. intermedium* var. *brevipes*, come da tutte le specie del genere, per i conidî non distintamente oblunghi. Havvi è vero un *Gl.? succineum* Sacc. con conidî sferici, ma l' A. stesso lo riferisce con dubbio: *Num conidia sint bene evoluta v. merae plasmatis guttulae, dijudicare nequeo; ergo de genere quoque dubium restat* (P. A. Saccardo, Syll. III. p. 708).

Habitat: in foliis vivis vel languidis *Fici Beniaminae*, Giardino Bellini di Catania, Febr.—Martio 1903 (Ipse legi).

Gloeosporium Cytharexyli Scalia n. sp.

Maculis orbicularibus vel irregularibus, sparsis sed non rare confluentibus, albido griseis, in pagina superiore foliorum linea purpureo-fuliginea parum elevata constanter circumscriptis, in inferiore obscurioribus, fere stramineis ac fuscidulo-marginatis: acervulis epiphyllis, atris, punctiformibus, primum tectis denique erumpentibus, sparsis vel 2—confluentibus; conidiis oblongo-cylindraceis, utrinque late rotundatis, medio saepius constrictis, 13 — 15.5 × 6 — 7, plasmate granuloso, guttulato farctis, episporio tenui, laevi; basidiis filiformibus, subaequilongis, continuis, hyalinis e stromate parenchymatico, atro-fuligineo hortis.

Determina sulle foglie delle macchie orbicolari od irregolari, angolose, sulla pagina superiore di colore bianco-grigiastro e circoscritte da una linea purpureo-fuliginea, sulla pagina inferiore invece sono quasi pagline o color foglia morta e limitate da una zona di colore nerastro. Gli acervuli costantemente epifilli si presentano nella parte arida disseccata della foglia sotto forma di puntini neri più o meno abbondanti, irregolarmente sparsi e qualche volta confluenti. Nella sezione trasversale si osserva al di sotto dell' epidermide uno stroma discoidale parenchimatico di color nero-fuliginoso, costituito da elementi poliedrici e minuti. Al di sopra di questo stroma si ha uno strato fertile, formato di piccole cellule incolore, dal quale si elevano i basidii filiformi, corti, portanti alla loro sommità le spore oblunghe, largamente arrotondite agli estremi, jaline, qualche volta diritte o un poco curve, per lo più alquanto strozzate nella loro porzione mediana in modo da ricordare quasi le spore di *Ascochyta Pisi*. Queste spore hanno l' episporio esilissimo e liscio, il loro plasma è granuloso e contiene numerose gocciole di varie dimensioni e irregolarmente disposte.

Assai diversa per i suoi caratteri da *Gl. intermedium* Sacc., a cui non può essere riferita per i basidii sempre continui e jalini, per le spore quasi sempre strozzate nel mezzo e variamente fornite di gocciole d'olio, la nostra specie è prossima a *Gl. affine* Sacc. Con questa specie ha commune la forma e il colore delle macchie; ne differisce però alquanto per le dimensioni delle spore e per essere queste strozzate e guttulate. Corrispondono d'altra parte i caratteri dei basidii, ma nella nostra gli acervuli non sono mai ricoperti dall'epidermide annerita.

Habitat: in foliis vivis vel languidis *Cytharexyli quadrangularis*, R. Orto botanico di Catania (Legit et comm. Dr. G. Muscatello), Febr. 1903.

Gloeosporium intermedium Sacc.

forma **Jasmini arabicae** Scalia n. f.

Acervulis copiosis, oblongis, 170 — 190 μ. diam., atris, epidermide lacerata cinctis; stromate discoidali, concavo, parenchymatico fere olivaceo; strato proligero tenui, parenchymatico subhyalino; sporulis rectis, oblongo-cylindraceis, hyalinis, utrinque rotundatis, 15—17×3—4, episporio tenui, plasmate granuloso ac minute guttulato farctis; basidiis filiformibus, hyalinis, subaequilongis suffultis.

Sopra rametti aridi disseccati di Gelsomino d'Arabia, in macchie irregolari di colore paglino, per lo più allungate secondo l'asse del ramo, si osservano numerosi puntini nerissimi quasi sempre allungati e mostranti a piccolo ingrandimento come un puntino bianco appena percettibile che è dato dalle spore che vengono fuori sotto forma di colonnetta. Le spore oblunghe, continue, cilindriche arrotondite alle due estremità e variamente guttulate si originano sopra basidii lunghi quasi al pari di esse e derivanti da uno strato fertile parenchimatico che riveste uno stroma discoidale, concavo e quasi olivaceo.

Riferisco a *Gl. intermedium* Sacc. il materiale da me osservato per la grande somiglianza delle spore; i basidii però non sono nel nostro caso fuliginei alla base e sono alquanto più corti e più sottili. Noto ancora che il Saccardo (Syll. III, p. 702) e quanti dopo di lui riferiscono la diagnosi della specie, parlando dei conidi dicono: *conidiis elongatis, utrinque rotundatis, rectis*, EGUTTULATIS *hyalinis*....; nel mio materiale invece i conidii sono, come dissi, variamente guttulati e tali in vero li figura il Penzig nel suo classico lavoro Studi botanici sugli Agrumi (Tav. XXXVII fig. 4)

Habitat: in ramulis exsiccatis *Jasmini arabicae*, R. Orto botanico di Catania, Junio 1899 (Legit Cl. Prof. P. Baccarini).

Colletotrichum Vanillae Scalia n. sp.

Maculis nullis vel fuscidulis: acervulis amphigenis sed in hypophyllo copiosioribus aterrimis, sparsis sed non rare 2-confluentibus, 120 — 210 μ diam., subcuticularibus, initio fere Vermiculariam simulantibus, postea subcolumnaribus, erumpentibus ac cuticula lacerata cinctis; setulis subrigidis vel flexuosis, fuscis, apicem versus paullum decoloratis, 3-septatis, ad septa, sed non constanter, parum incrassatis, basi subtuberculatis 50 — 100 × 5 — 6; basidiis fasciculatis, cylindraceis, apicem versus rotundatis, fere spathulaeformibus, dilute olivaceis vel subchlorinis, 1-septatis, 24 — 34 × 6.5 — 7; conidiis continuis, oblongo-cylindraceis, apicem versus late rotundatis, basi saepeque subangustatis, non rare inaequalibus ac fere curvatis chlorinis plasmate granuloso farctis, 18 — 21 × 5.5 — 7.

Sopra macchie fumoso-fuliginee, principalmente sulla pagina inferiore delle foglie si osservano numerosissimi puntini neri per lo più sparsi ma qualche volta confluenti.

Nella sezione trasversale si scorge uno stroma quasi olivaceo o fumoso, subcuticolare e che non si spinge oltre il secondo strato del mesofillo. Questo stroma appiattito o un poco concavo è costituito di cellule brune poliedriche; cellule simili invadono il lume delle cellule epidermiche prima che lo stroma sia completamente evoluto. Questo stroma ispessendo fa stirare la cuticola che finalmente si rompe e circuisce la fruttificazione del fungo.

Dallo stroma verso l' esterno si elevano cellule allungate perpendicolarmente, a parete sottile e poco colorata e che vanno a finire nello strato fertile quasi jalino: da esse si dipartono numerose setole principalmente verso il margine dello stroma.

Le setole brune, meno intensamente colorate verso l' apice, dove sono in qualche caso incolore, sono quasi costantemente rigonfiate alla base e presentano generalmente 3 setti trasversali in corrispondenza ai quali possono essere rigonfiate. I basidii densamente aggregati e sorgenti di tra le setole sono per lo più cilindrici od anche quasi clavati, bicellulari e debolmente colorati. I conidii unicellulari, quasi sempre cilindrici ed arrotonditi alle estremità, sono per lo più diritti, ma ve ne ha di curvati e di irregolari: non di rado si incontrano conidii arrotonditi all' apice soltanto e assottigliati verso la base.

Secondo il Rev. Ab. G. Bresadola, che osservò il mio materiale, si tratta di una forma *microspora* di *Vermicularia Vanillae* Delacr. (Bull. Soc. Mycol. Franc. 1893, p. 186, pl. XII, fig. 2). Effettivamente non sono bene definiti i limiti tra *Vermicularia* e *Colletotrichum*, abbiamo tra altri un *Coll. Violae-tricoloris* R. E. Smith intermedio tra i due generi. Se io mi sono deciso a riferire il mio materiale a *Colletotrichum* si è per il fatto che quelli che sembrerebbero periteci completi astomi, non sono altro, a mio modo di vedere, che stadi iniziali. Che il nostro sia un *Colletotrichum* genuino è dimostrato dalla forma, disposizione e colore dei basidi; caratteri tutti che disgraziatamente ci mancano per la specie del Delacroix. Dalla fig. II[b] di questo Autore rilevo una grande somiglianza col mio materiale, ma le setole non sono rigonfiate in basso (fig. II[c]) e la massa stromatica è assai meno sviluppata (II[b]). Del resto, pur non essendo identica alla mia, io credo che anche la specie del Delacroix sia da riferire al genere *Colletotrichum*, tanto più che non mancano le specie di questo genere le quali nella fas iniziale rassomigliano a *Vermicularia*: lo stesso Autore difatti ha descritto più tardi il *Coll. Anthurii* (Bull. Soc. Mycol. 1897, p. 110, tav. VIII, fig. D) del quale non figura lo stato iniziale di *Vermicularia*, di cui tien conto nella diagnosi.

Nessuna specie del genere *Colletotrichum* è stata ancora segnalata su *Vanilla*, se ne togli *Colletotrichum* sp. Stonem raccolto nell'America settentrionale e di cui l'A. dà la seguente diagnosi: *Acervulis atris erumpentibus, amphigenis, et caulicolis, 150 — 180 μ diam; setulis circa basim 3—4 septatis, coloratis: basidiis confertissimis, septatis 30—45 μ longis.* Il non avere l'A. osservate le spore, il fatto che i basidii nel mio materiale sono soltanto 1—settati e di minori dimensioni mi fanno ritenere che si tratti di specie diversa, tanto più che, per quanto abbia accuratamente ricercato, non mi fu dato rinvenire nessuna forma ascofora, mentre lo Stonem riferisce il suo *Colletotrichum* a *Gnomoniopsis Vanillae* Ston.

Habitat: In foliis exsiccatis *Vanillae odoratae*, R. Orto botanico di Catania, Junio 1901 (Ipse legi).

Coryneum Eriobotryae Scalia n. sp.

Maculis amphigenis orbicularibus, sparsis quandoque confluentibus irregularibusque, in pagina superiore foliorum argillaceo-albidis vel griseolis, linea angusta, atro-purpurea, parum elevata, bene limitatis, in pagina inferiore ochraceo-argillaceis, linea fusca circumscriptis:

acervulis sparsis, primum tectis denique erumpentibus ac epidermide lacerata cinctis, saturate nigris, amphigenis sed saepius hypophyllis, 270—345 µ diam. : basidiis filiformibus, hyalinis, continuis, 10 — 16 non rare usque 30 µ longis, 1—1.5 µ crassis e stratu proligero parenchymatico, e cellulis minutissimis achrois formato, hortis: conidiis primum continuis, hyalinis, postea 1-septatis chlorinis denique 3-septatis, ad septa non vel indistincte constrictis, loculis omnibus olivaceo-fuscidulis, eguttulatis, 13.5—9×6.5—7, ovalibus vel oblongo ellipsoideis, basi saepeque angustato-truncatulis.

Determina sulle foglie delle macchie orbicolari di colore bianco argillaceo o grigiastre sulla pagina superiore, ocracee sulla inferiore e limitate sempre da una linea bene definita. Gli acervuli bene distinti sulla pagina superiore, dove si presentano sotto forma di puntini nerastri, lo sono meno sulla inferiore nella quale sono mascherati dai peli. I basidii sorgono dalla base degli acervuli e sono filiformi, jalini, continui e misurano 10-16 od anche 30 µ in lunghezza.

Le spore, solitarie all' apice dei basidii, si presentano prima come vescichette sferiche incolore, poi diventano debolmente giallastre mentre si forma un setto mediano, finalmente sono di colore olivaceo-fosco, 3-settate, non od appena percettibilmente ristrette in corrispondenza alle pareti trasversali, con logge uniformemente colorate e sprovviste di gocciole. La forma delle spore è variabile: ve ne sono di ovali, ma per lo più sono oblunghe, arrotondite all' apice, un poco assottigliate e troncate verso la base; spesso si presentano diritte, ma ve ne sono anche inequilaterali.

Questa specie si distingue da *C. foliicolum* Fuck. perchè forma delle macchie bene delimitate, per la mancanza di uno stroma periferico olivaceo e per le logge delle spore uniformemente colorate.

Per quest' ultimo carattere anzi è affine a *C. concolor* Penzig e a *C. Corni albae* (Roum.) Sacc. Si distingue però dalla prima di queste due specie per i basidii più sottili, per le spore non sempre oblungo-ellittiche ed arrotondite alle due estremità, per il colore di queste spore e le dimensioni. È diversa dalla seconda per la forma e le dimensioni delle spore.

H a b i t a t : in foliis vivis *Eriobotryae japonicae* (soc. *Pleospora herbarum*). Piazza Armerina (Legit et comm. prof. C a r p e n t i e r i) Martio 1903.

Mascalucia, Maggio 1903.

Applicazioni analitiche dei gruppi di proiettività trasformanti in sè una forma Hermitiana

di GUIDO FUBINI

L' introduzione delle metriche definite da una forma Hermitiana da me studiata in recenti lavori, (*) permette di completare risultati da me già ottenuti nella generalizzazione della teoria delle funzioni automorfe e iperfuchsiane di Picard. Essa permette di trasportare nello studio di queste funzioni quei metodi, che il Poincaré trasse dallo studio delle metriche a curvatura costante per lo studio delle funzioni fuchsiane e zeta-fuchsiane. In questo lavoro io darò una nuova dimostrazione dell' esistenza delle funzioni iperfuchsiane invarianti per un dato gruppo, dimostrazione che permetterà di dimostrare che tali funzioni variano con continuità al variare continuo del gruppo; quindi dimostrerò almeno in un caso particolare notevole l' esistenza di funzioni analoghe alle zeta-fuchsiane, funzioni che permettono di approfondire lo studio dei sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali con coefficienti algebrici e che io chiamerò funzioni zeta-iperfuchsiane. Per semplicità studierò soltanto il caso di funzioni a due variabili: i metodi valgono in generale.

Sia $xx_0 + yy_0 - zz_0$ una forma Hermitiana A indefinita e siano x_0, y_0, z_0 le variabili immaginarie coniugate alle x, y, z.

(*) *Sulla teoria delle forme quadratiche Hermitiane. ecc.* Atti dell'Accademia Gioenia 1903. Cfr. anche dell'Istituto Veneto (1903), *Annali di Matematica* (1904).

Porremo

$$\frac{x}{z} = u_1 = u_1' + i\, u_1'' \; ; \; \frac{y}{z} = u_2 = u_2' + i\, u_2''$$

dove u_1', u_1'', u_2', u_2'' sono variabili reali. A ogni trasformazione lineare omogenea T sulle x, y, z corrisponde una trasformazione T' lineare fratta (in generale) sulle variabili u_1, u_2. Siano u_1^0, u_2^0 le variabili immaginarie coniugate delle u_1, u_2. Consideriamo quelle trasformazioni T che lasciano fissa la A e le corrispondenti trasformazioni T'. Nello spazio R, in cui le u_1', u_1'', u_2', u_2'' sono le variabili coordinate, le trasformazioni T' costituiscono un gruppo continuo, che si può considerare come *gruppo di movimenti* di una metrica definita dall' elemento lineare *reale definito*

$$(1)\quad ds^2 = \frac{(1 - u_2\, u_2^0)\, du_1\, du_1^0 + (1 - u_1\, u_1^0)\, du_2\, du_2^0 + u_1\, u_2^0\, du_2\, du_1^0 + u_2\, u_1^0\, du_1\, du_2^0}{(1 - u_1\, u_1^0 - u_2\, u_2^0)^2}$$

dove è naturalmente $u_1 = u_1' + i\, u_1''$, $u_2 = u_2' + i\, u_2''$ ecc. Ciò si può verificare direttamente, o anche dedurre dalle formule da me date nei luoghi citati per la distanza (nelle nostre metriche) di due punti, esaminando ciò che essa diventa se i due punti sono infinitamente vicini. (*)

Consideriamo ora le u_1', u_1'', u_2', u_2'' come coordinate cartesiane in uno spazio euclideo rappresentativo R'; in questo l'assoluto del nostro spazio R ha per immagine l'ipersfera S data da

$$(2)\qquad (u_1')^2 + (u_1'')^2 + (u_2')^2 + (u_2'')^2 = 1$$

e le geodetiche uscenti dal punto O ($u_1'=0$, $u_1''=0$, $u_2'=0$, $u_1''=0$) hanno per immagine le rette uscenti dall' origine. Le ipersfere di R col centro in O hanno per immagine le ipersfere di R'

(*) Cfr. loc. cit. pag. 42.

col centro nell' origine: in una parola le ipersfere di R' col centro nell' origine sono anche ipersfere per R.

Troviamo ora che relazione passa tra il raggio ρ di queste ipersfere nella metrica (euclidea) di R' e il raggio r, che corrisponde a esse nella metrica di R. Per veder ciò moviamoci su quella retta di R', definita da $u_1'' = u_2' = u_2'' = 0$. Essa ci rappresenta una geodetica di R; due punti infinitamente vicini di essa, rappresentano due punti infinitamente vicini di R, la cui distanza, essendo per ipotesi $u_1 = u_1^0 = u_1'$; $u_2 = u_2^0 = 0$, è data per la (1) da

$$ds^2 = \frac{du_1'^2}{(1 - u_1'^2)^2}$$

Se dunque il raggio *euclideo* della nostra sfera è ρ, il raggio r sarà

$$(3) \qquad r = \int_0^\rho \frac{d\rho}{(1 - \rho^2)} = \frac{1}{2} \int_0^r \left\{ \frac{1}{1 + \rho} + \frac{1}{1 - \rho} \right\} d\rho = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$$

Troviamo ora il volume non-euclideo della nostra sfera di raggio r. Sia $d\tau$ l' elemento di volume della nostra metrica; come si sa se Δ è il discriminante di ds^2, è $d\tau = \sqrt{\Delta}\, du_1\, du_1^0\, du_2\, du_2^0$. Ora si trova facilmente che

$$\Delta = \frac{1}{16\,(1 - u_1 u_1^0 - u_2 u_2^0)^6}$$

quindi

$$d\tau = \frac{du_1\, du_1^0\, du_2\, du_2^0}{4\,(1 - u_1 u_1^0 - u_2 u_2^0)^3}$$

Passando alle variabili reali $u_1'\ u_1''$, $u_2'\ u_2''$ si trova che

$$(4) \qquad d\tau = \frac{du_1'\, du_1''\, du_2'\, du_2''}{(1 - \delta^2)^3}$$

dove sia $\delta^2 = (u_1')^2 + (u_1'')^2 + (u_2')^2 + (u_2'')^2$. Se noi indichiamo con $d\tau'$ l' elemento di volume *euclideo* corrispondente in R' troviamo

$$d\tau = \frac{d\tau'}{(1-\delta^2)^3} \tag{5}$$

Introduciamo in R' coordinate polari, ponendo

$u_1' = \delta \cos\theta$; $u_1'' = \delta \operatorname{sen}\theta \cos\varphi$; $u_2' = \delta \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \cos\psi$; $u_2'' = \delta \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi$

dove δ, θ, φ, ψ, sono variabili varianti rispettivamente negli intervalli $(0, +\infty)$, $(0, \pi)$, $(0, \pi)$, $0, 2\pi)$. Si ha che

$$d\tau^1 = \delta^3 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\varphi \, d\theta \, d\varphi \, d\psi \, d\delta$$

E quindi

$$d\tau = \frac{\delta^3}{(1-\delta^2)^3} \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\varphi \, d\theta \, d\varphi \, d\psi$$

Quindi il volume non—euclideo di una ipersfera il cui raggio euclideo (il raggio dell' immagine euclidea) è ρ è dato da

$$\int_0^\rho \left(\frac{\rho}{1-\rho^2}\right)^3 d\rho \int_0^\pi \operatorname{sen}^2\theta d\theta \int_0^\pi \operatorname{sen}\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi = \frac{1}{2}\pi^2 \left(\frac{\rho^2}{\rho^2-1}\right)^2$$

Se r è il raggio non euclideo della nostra sfera abbiamo per la (3) che questo volume V è dato dalla

$$V = \frac{\pi^2}{32}\left(e^{2r} + e^{-2r} - 2\right)^2 = \frac{\pi^2}{32}\left(e^{r} - e^{-r}\right)^4 \tag{4}$$

Consideriamo un movimento qualsiasi T della nostra metrica.

Le lunghezze (non euclidee), i volumi ecc. non vengono naturalmente alterate. Siano $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2$, $\overline{u}_1^0$, $\overline{u}_2^0$ le coordinate del punto corrispondente per il movimento T al punto $C \equiv (u_1, u_2,$

u_1^0, u_2^0). Vogliamo calcolare l' Iacobiano I delle $\bar{u}$ rispetto alle u; intanto, poichè T non altera i volumi si ha la

$$\frac{d\bar{u}_1 \, d\bar{u}_1^0 \, d\bar{u}_2 \, d\bar{u}_2^0}{(1 - \bar{\delta}^2)^3} = \frac{du_1 \, du_1^0 \, du_2 \, du_2^0}{(1 - \delta^2)^3}$$

dove $\bar{\delta}^2 = \bar{u}_1 \, \bar{u}_1^0 + \bar{u}_2 \, \bar{u}_2^0$. Ma ora per note regole di calcolo, il primo membro dell' ugnaglianza precedente è uguale a

$$\frac{du_1 \, du_1^0 \, du_2 \, du_2^0}{\left(1 - \bar{\delta}^2\right)^3} \, I$$

donde si trae:

$$I = \left(\frac{1 - \bar{\delta}^2}{1 - \delta^2}\right)^3 \tag{5}$$

Ora δ e $\bar{\delta}$ non sono che i raggi vettori delle immagini euclidee di un punto C e del suo trasformato per T. Indicando con r, $\bar{r}$ i raggi vettori *non euclidei* (distanze geodetiche dalla origine) dei punti stessi in R, abbiamo per la (3) che è:

$$I = \left(\frac{e^r + e^{-r}}{e^{\bar{r}} + e^{-\bar{r}}}\right)^6 \tag{6}$$

Sia ora dato un gruppo qualsiasi G discontinuo di movimenti T. Esso, come sappiamo (*), è propriamente discontinuo in R; costruiamone i campi fondamentali con uno qualsiasi dei nostri procedimenti (**); tutti questi campi fondamentali saranno dal punto di vista delle nostre metriche uguali tra di loro (sovrapponibili). Siano ora T_1, T_2,.... T_n.... le operazioni del nostro gruppo e costruiamo la serie

$$|I_1|^k + |I_2|^k + |I_3|^k + \ldots\ldots + |I_n|^k + \ldots\ldots \tag{7}$$

dove k è un numero intero, $|I_n|$ è il valore assoluto dell' Ia-

(*) Cfr. loc. cit. pag. 49.

(**) Cfr. loc. cit. pag. 50, 51.

cobiano precedentemente calcolato relativo al movimento T_n. Questi Iacobiani sono funzioni del punto C; immaginiamo ora C variabile in un piccolo intorno di volume *non euclideo* a e consideriamo i punti trasformati C_1 C_2..... e gli intorni corrispondenti per il nostro gruppo: i volumi a_1 a_2...... di questi intorni saranno tutti uguali ad a. Se, come supponiamo, a è abbastanza piccolo, essi saranno tutti distinti. Quelli di essi che sono interni o hanno anche soltanto una parte comune a una sfera di raggio r sono interni a una sfera di raggio $r+d$, se d è la massima corda di a e sono perciò per le (4) in un numero n tale che

$$(8) \qquad n \leq \frac{\pi^2}{32\,a}\left(e^{r+d} - e^{-(d+r)}\right)^4 < \frac{\pi^2}{32\,a}\, e^{4(r+d)}$$

Consideriamo ora una serie di sfere concentriche di raggi r, $2\,r$, $3\,r$.... ; quei termini della (7), i cui punti corrispondenti C_i cadono tra la sfera di raggio $(n-1)r$ e quella di raggio nr sono per la (8) in numero minore di $\frac{\pi^2}{32a}\, e^{4(nr+d)}$; ognuno di essi per la (6) è minore di

$$\left(\frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{e^{(n-1)r} + e^{-(n-1)r}}\right)^{6k} < \left(e^{\lambda} + e^{-\lambda}\right)^{6k} e^{-6k(n-1)r}$$

dove λ è il massimo raggio vettore non euclideo di un punto C entro l' intorno a. Il loro contributo è perciò minore (indicando con h un fattore indipendente da n) della quantità $h\, e^{-(6k-4)nr}$. Se dunque converge la

$$\sum e^{-(k-4)nr}$$

converge anche la (7). Se dunque $6k - 4 > 0$ ossia se $k > \frac{2}{3}$ la nostra serie converge assolutamente e uniformemente.

Considerazioni analoghe a quella di Poincarè dimostrebbero che al variare *continuo* del gruppo, questa serie si conserverebbe tale anche rispetto ai parametri definenti il gruppo.

Se ora F è una funzione p. es. razionale di u_1, u_2 e regolare nel campo (interno alla (2)) della loro variabilità e perciò inferiore a una costante determinata in questo campo, e se noi indichiamo con $F(C_n)$ il suo valore nel punto C_n, la serie

$$(9) \qquad \sum_n F\,(C_n)\; I_n^k$$

è assolutamente e uniformemente convergente se $k > \frac{2}{3}$ perchè la F è finita e la (7) è assolutamente e uniformemente convergente. Una tal serie per una trasformazione T_k del gruppo è moltiplicata come io ho già osservato altrove (*) per un fattore dipendente solo da T_k: il quoziente di due tali serie rappresenta perciò una funzione invariante per il gruppo.

Nella nota citata io avevo dimostrato l'esistenza di tali funzioni; il risultato fondamentale e nuovo è che queste funzioni sono funzioni continue dei parametri definenti il gruppo, appunto come avviene per le funzioni fuchsiane di Poincaré.

Ma le nostre metriche possono condurre rapidamente a un altro risultato ben più importante, alla generalizzazione cioè delle funzioni zetafuchsiane di Poincaré (**).

Consideriamo a tal fine un gruppo Γ iperfuchsiano, il cui poliedro generatore sia tutto a distanza (non euclidea) finita e sia G un gruppo di sostituzioni lineari omogenee su p variabili a lui oloedricamente o meriedricamente isomorfo. Siano H_1, H_2 ....., H_p p funzioni razionali delle u_1, u_2 regolari nel campo interno alla (2); noi ne indicheremo con $H_t\,(C_i)$ $(t = 1, 2,\ldots, p)$ i valori nel punto C_i trasformato di C per il movimento T_i. La trasformazione di G corrispondente a T_i si indichi con S_i.

Una trasformazione S_i applicata a p quantità qualsiasi $\lambda_1\ \lambda_2,\ldots\ \lambda_p$, le porta in p loro combinazioni lineari che noi indicheremo con $\lambda_1\ S_i$, $\lambda_2\ S_i$, ... , $\lambda_p\ S_i$.

(*) In una nota cioè ora in corso di stampa negli « Annali di Matematica ».

(**) Acta Mathematica Tomo 5.

Costruiamo le p serie:

$$\xi_\mu = \sum_i \left\{ \left[H_\mu \left(C_i \right) \right] S_i^{-1} \right\} I_i^k \qquad (\mu = 1, 2, \ldots \rho) \tag{10}$$

Si può dimostrare al modo stesso di Poincarè (*):

I. Se le (10) sono assolutamente e uniformemente convergenti le $\frac{\xi_\mu}{\theta}$ dove è una qualunque delle serie (9) considerate come funzioni del punto C, subiscono la trasformazione S_k, se al punto C viene applicato il movimento T_k.

II. Esiste una costante α tale che se la geodetica congiungente il punto C al punto C_i ha una lunghezza (non euclidea) L_i, il numero n dei poliedri fondamentali che essa attraversa è tale che $n < \alpha\ L_i$.

III. Esiste una costante M indipendente da i, tale che i coefficienti di S_i e di S_i^{-1} sono minori in valore assoluto di M^n ossia di $e^{L_i \alpha \log M}$; posto $N = \alpha \log M$, essi quindi sono minori di e^{NL_i}.

Per dimostrare *dunque l'esistenza di funzioni analitiche tali che, mentre C subisce una trasformazione T_k, subiscano la trasformazione S_k* basta dimostrare la convergenza assoluta uniforme entro l'intorno a di C della (10) ossia poichè le H, funzioni regolari entro la (2), sono finite, basta dimostrare la convergenza della serie di cui il termine i^{esimo} è il prodotto di I_i^k per un coefficiente della trasformazione S_i^{-1}. Ricordando la proprietà enunciata di tali coefficienti, si vede che basterà dimostrare la convergenza della serie

$$\sum_n e^{NL_i}\ I_i^k \tag{11}$$

(*) Cfr. loc. cit. pag. 232-233-234.

dove L_i è come sappiamo la distanza geodetica $C_i\ C$; questa distanza è in generale minore (o se si vuole è dell' ordine di grandezza) di $C_iO + OC$ dove O sia l' origine; basterà perciò indicando con r_i il raggio vettore *non euclideo* di C_i dimostrare la convergenza della

$$\Sigma\ e^{Nr_i}\ I_i^k$$

Ora per la (6) è (indicando con r il raggio vettore di C)

$$I_i = \left(\frac{e^r + e^{-r}}{e^{r_i} - e^{-r_i}}\right)^6$$

E da ciò si deduce tosto che si può scegliere una costante β tale che

$$|\ e^{Nr_i}\ | < |\ I_i^\beta\ |$$

Basterà perciò dimostrare la convergenza assoluta di $\Sigma\, I_i^{k+\beta}$ e noi sappiamo già che una tale serie converge assolutamente e in ugual grado se $k + \beta > \frac{2}{3}$, ossia se k è abbastanza grande.

L' esistenza delle nostre funzioni è così dimostrata.

Noi abbiamo così visto con quanta semplicità le nostre metriche permettano di estendere a campi tanto più vasti le geniali concezioni di Poincaré e quanta rapidità esse consentano nelle dimostrazioni. Noi ora vorremo indicare alcune conseguenze del nostro ultimo teorema, che mi sembrano del massimo interesse. Come dimostrò Picard (*) in un caso particolare, tra le funzioni di u_1, u_2 invarianti per un gruppo Γ iperfuchsiano ne esistono due tali che ogni altra funzione invariante per lo stesso gruppo è funzione algebrica di quelle; diremo ξ, η due tali funzioni; consideriamo un sistema di p funzioni $\xi_1\ \xi_2 \ldots \xi_p$ di u_1, u_2

(*) Acta Mathematica tomo 5.

tali che eseguendo su u_1, u_2 un' operazione T di Γ esse subiscano un' operazione del gruppo corrispondente G. Supponiamo per semplicità che sia:

$$p = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + k = \frac{k\,(k+1)}{2}$$

dove k è un intero positivo. Le $\xi_1 \ldots\ldots \xi_p$ funzioni di u_1, u_2 si potranno considerare come funzioni di ξ, η.

È ora ben chiaro che noi potremo determinare delle funzioni a_{rstu} dove r, s sono due interi positivi o nulli, la cui somma è k, e dove t, u sono due interi positivi o nulli, la cui somma è un intero positivo o nullo minore di k, tale che si abbia:

$$\frac{\partial^k \xi_i}{\partial \xi^r \, \partial \eta^s} = \sum_{t,u} a_{rstu} \frac{\partial^{(t+u)} \xi_i}{\partial \xi^t \, \partial \eta^u} \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots p) \tag{12}$$

Infatti per ogni coppia di valori per r, s otteniamo ponendo per i i suoi p valori tante equazioni per le a_{rstu} quante sono le incognite. Se anzi noi fissiamo nelle (12) i valori di r, s e facciamo variare i noi otterremo un sistema di equazioni *lineari* per le a_{rstu} che risolute danno le a_{rstu} sotto forma di quozienti di due determinanti. Ognuno di essi è formato di p righe: la i esima delle quali contiene termini che sono o la ξ_i stessa o le sue derivate. Le altre righe si ottengono mutando i successivamente in 1, 2, ..., p.

Poichè se noi applichiamo alle u_1, u_2 un movimento di Γ, le ξ, η restano inalterate e le ξ_i subiscono una sostituzione lineare, a coefficienti costanti, questi due determinanti resteranno moltiplicati per uno stesso fattore; e perciò le a_{rstu} restano inalterate; esse sono quindi funzioni di u_1, u_2 invarianti per Γ e quindi, per un teorema testè citato, esse saranno funzioni algebriche di ξ, η.

Il sistema (12) di equazioni lineari alle derivate parziali è perciò a coefficienti algebrici. Noi abbiamo perciò trovato *una ampia classe di sistemi di equazioni lineari alle derivate parziali a coefficienti algebrici in due variabili ξ, η tali che si possono esprimere tanto le variabili ξ, η quanto un sistema fondamentale di integrali per mezzo di funzioni uniformi di due variabili u_1, u_2. Di più le ξ, η riescono funzioni iperfuchsiane di* u_1, u_2; *gli integrali fondamentali sono dati* (con un linguaggio analogo a quello di Picard-Poincarè) *da funzioni zetaiperfuchsiane. Il problema dell' integrazione di tali sistemi di equazioni si può perciò* (nel senso moderno di tale parola) *riguardare come completamente risoluto* (*).

Il teorema vale evidentemente anche per equazioni con n *variabili indipendenti.*

(*) Si potrebbe chiedere se le proprietà teste trovate valgono per ogni sistema integrabile di equazioni lineari alle derivate parziali a coefficienti algebrici: la risposta e, credo, senza dubbio affermativa: il dimostrarlo rigorosamente presenta però delle difficoltà, per le scarse cognizioni che abbiamo sulle funzioni dipendenti da più di una variabile indipendente. Tale questione sarebbe forse facilmente affrontabile col *metodo di continuità* di Klein e Poincaré: io non credo però che valga la pena di fare un tale studio, perchè, secondo me, tale metodo servirebbe più per intuire che per dimostrare con pieno rigore le proprietà in discorso.

Memoria X.

Fenomeni carsici e pseudovulcanici del monte S. Calogero di Sciacca

Memoria del Dott. RAFFAELE DI MILIA

NOTIZIE STORICHE

Il monte S. Calogero, l' antico Cronio, fu, in ogni tempo, per le stufe e le sorgenti termo-minerali oggetto di grande ammirazione. Onde è che scrittori antichi (Diodoro Siculo, Dionisio di Alicarnasso, Strabone, Polieno, Pomponio Mela.... ecc.) e moderni (Savonarola, Baccio, Adua, Claudio Mario Arezzo, Fazello, Bellitti.... ecc.) fanno a gara per celebrarne il nome.

Pertanto la distanza da un centro di studii e la mancanza di ferrovia, tra Sciacca e le grandi città dell' isola, impedirono che gli scienziati contemporanei facessero del S. Calogero oggetto di studio. Quindi vecchi errori (acque che perennemente dalle stufe fluirebbero ai piedi del monte, quasi scorressero in condotti naturali; pareti della grotta vaporosa incrostate di nitro e solfato di rame.... ecc.); nere impressioni di foschi sogni (l'orrorosa sterilità del monte.... ecc.) si son ripetuti di secolo in secolo e si son ristampati fino a poco tempo fa nei volumi dei dotti. Valga il vero: le prime notizie particolareggiate di quanto osservasi sul monte S. Calogero si hanno dal Fazello (1), il quale nella Dec. I, lib. VI, cap. 3e così si esprime:

« Quibus ille *(mons)* non modo mari vicinus, sed ad mare « etiam procurrens plures habet cavernas, unde lutoso sulphu-

(1) F. Thomae Fazelli (n. 1498—✝1570). *De Rebus Siculis decas I. Catanae* MDCCXLIX.

« re (?) sale, ignibus (?) et calentibus aquis abundat, inde per « totum montis tractum aquarum faetorum maximus, sulphur « et aquarum scaturigines effluunt. » E più oltre: — « Sed non « procul inde ad montis latus mare spectans, puteus est obliquus « et immensus, unde magnus effertur sonus, venti ne subterranei « an laticis ad ima delabentis incertum. Ad verticis spondam « foramen quoque est, montis viscera penetrans, ex quo etiam « perpetuus effunditur sonitus, aquae ne etiam, an venti adhuc « ignotum: tametsi illius perpetuitas et uniformitas aquas dila- « bentes indicare videantur. »

Verso la fine del secolo decimottavo (1776) Bellitti (2) scrisse una monografia « *Delle stufe e dei bagni di Sciacca* » nella quale è ben dipinta l' amenità e l' ubertosità del monte, v' è una descrizione della grotta vaporosa, anche più particolareggiata di quella data dal Fazello e sono esattamente indicati gli altri meati fumanti. L' opera del Bellitti, ricca di diligenti e pregevoli osservazioni, ebbe l' onore di essere pubblicata per cura del Tribunale del Real Patrimonio di Sicilia, ma fu poco conosciuta.

Pare impossibile, ma è dura verità: l' Abate Ferrara (3), che pubblicò la sua opera « *I Campi Flegrei della Sicilia* » nel 1810, dopo aver dichiarato nella prefazione di aver osservato tutti i luoghi, di cui scrive, non fa che ripetere il Fazello, offuscandone le tinte. Ecco il testo:

« La grossa montagna di S. Calogero, che isolata s' innalza « dalla spiaggia sopra cui è Sciacca, presenta simili fenomeni « di una sotterranea fermentazione. La superficie come che for- « mata da strato calcareo, che in quella parte della Sicilia, per « una grande estensione, è mescolato al sale muriatico, onde ha « un sensibilissimo carattere di salato, è condannata ad *una per-* « *petua ed orrorosa sterilità.* (4) Ma nell' interno di essa tutto

(2) ANTONINO SILVESTRO BELLITTI — *Delle Stufe e dei bagni di Sciacca* — Palermo 1783.

(3) AB. FRANC. FERRARA — *I campi Flegrei della Sicilia*... ecc. Messina 1810.

(4) È il caso di ripetere: Spectaculum admissi risum teneatis amici?...

« annunzia una perenne ed incessabile fermentazione solforosa,
« perchè i fenomeni vi esistono da tempi immemorabili. Quasi
« da ogni parte, da ogni buco, da ogni fenditura escono vapori
« di acqua bollente e di zolfo, che riempiono del loro odore sof-
« focante tutta quella estensione. Vi si vede un poco al basso
« una sorgente assai calda e solforosa, un' altra che è purgante;
« un' altra limpida e buona a beversi; un'altra calda e salata e
« carica di einereo glutine calcareo. Ma nella parte alta del fianco
« che guarda il mare si osserva un grande ed obliquo pozzo, den-
« tro il quale odesi un fragore continuo, come di un vento sotter-
« raneo o di una caduta di acqua. Verso la cima evvene un altro
« simile e dove il fragore sotterraneo è qualche volta più forte. »

Chi ha visitato, anche una sola volta, le stufe ed i bagni di Sciacca, ha bisogno di una buona dose d' ingenuità per ritenere che l' Ab. Ferrara vi abbia posato il piede. E bisogna pur dire che non ebbe mai per le mani l' opera del Bellitti; diversamente come poteva parlare di orrorosa sterilità del monte e tacere completamente della grotta vaporosa ?...

Quasi un secolo dopo il Ferrara, nessuna migliore cognizione si ha sui fenomeni che si svolsero e si svolgono sul monte S. Calogero, poichè il Mercalli (5) cita e ripete quanto aveva scritto il Ferrara.

La serie delle ricerche scientifiche si aprì al 1881, quando Zinno (6) pubblicò l' analisi qualitativa e quantitativa delle acque termali e dei vapori delle stufe; ma quel lavoro, come varii altri, se giovarono alla Medicina, nulla aggiunsero alle cognizioni geologiche. Sicchè sparsero viva luce due lavori (condotti da mano maestra e col massimo rigore scientifico) del Di Stefano (7), il

---

(5) G. Mercalli — *Vulcani e fenomeni vulcanici in Italia* — Milano 1883—p. 193.

(6) S. Zinno — *Analisi qualitativa e quantitativa dell' acqua santa, sulfurea e ferrata di Sciacca—Stufe di S. Calogero.* Napoli 1881.

(7) G. Di Stefano — *Appunti geologici sul Monte Cronio* (Publicato in appendice di un lavoro di G. Licata—*Le Stufe ed i bagni di Sciacca*) — *Osservazioni stratigrafiche, sul pliocene e postpliocene di Sciacca* (Nel Bollettino del R. Comitato Geologico an. 1889 n. 3-4).

quale illustrò la geologia stratigrafica del monte e di gran parte del territorio di Sciacca.

Rimanevano nell'esclusivo dominio della leggenda le grotte; e, la causa, che provocò la manifestazione esterna dei fenomeni psendovulcanici e ne sostiene il dinamismo, se intendevasi coi principii generali della scienza, non era obbiettivamente ricercata. Io dò col presente lavoro una descrizione esatta delle grotte, indicando le cause che le produssero, descrivo anche più minutamente degli autori che mi precedettero, le stufe, a scopo di precisare la causa, che provocò il dinamismo del psendovulcano ed infine, comparando l'intensità con cui alcuni fenomeni si svolgono oggi, e quella con cui si svolsero nel passato, indico l'epoca probabile, in cui la colonna vaporosa apparve sulla vetta del Cronio.

Monte S. Calogero.

Il monte S. Calogero si eleva dalla foce del torrente gran Salamone (W) ed a balze raggiunge la massima altezza, m. 387, sulla grotta vaporosa; similmente a balze declina al torrente Caroballace (E). Un forte rigetto contrario e diretto da E a W, lo tronca nel lato meridionale, in modo che esso si mostra declive a N, ove, a mezzo di basse colline, annodasi ai monti secondarii di Caltabellotta e Sambuca, e strapiomba con aspetto alpestre verso S. A questa parte alpestre segue un'ampia zona di terreno pianeggiante, la cui base è bagnata dalle acque del canale di Sicilia. La stratificazione geologica può riassumersi così:

1. Il Titonico, rappresentato da spessi strati di calcare con abbondanti cefalopidi e *Pigope dyphia*, forma il grosso del monte e dalla così detta Rocca rossa (W) si estende fin oltre la metà della lunghezza. Nella contrada Randazzo appare il Cretaceo, che di là si estende fino al Carobollace.

2. Il Nummulitico, molto potente, rappresentato da calcari marnosi bianchi o tufacei di color giallastro, lo ricopre come un ampio mantello.

Nel Titonico e nel Cretaceo abbondano i fenomeni carsici, (8) che trovansi sporadicamente rappresentati nel Nummulitico e sono ovunque rappresentati da grottucole, che rassomigliano come in miniatura alle grandi grotte del Carso e di altre regioni del mondo.

Fenomeni Carsici

Nella zona pianeggiante, che subì un forte abbassamento per effetto del rigetto, si trovano la grotta dei Mori, di Gallo e di Cinlla.

Grotta dei Mori — Trovasi al piede S del monte a circa m. 50 (9) sul livello del mare ed altrettanto più a N della sorgente bromojodurata S. Friscia; ebbe tal nome perchè, dicesi, che in tempi antichi servì di agguato ai corsari africani.

La grotta dei Mori presenta un primo antro a forma di ferro di cavallo, colle due branche rivolte verso il mare e colla curvatura verso *Rocca Rossa*. La forma fu determinata da due diaclasi convergenti a N e divergenti verso il mare: tali diaclasi sono perfettamente osservabili, essendo l'erosione più demarcata lungo il loro decorso nella volta dell'antro. All'estremo della branca orientale è l'apertura d'ingresso (alta m. 1.20; larga m. 0.70), la quale mostra nei colpi di scalpello di essere opera della mano dell'uomo, o almeno dilatata. Il fondo delle due branche dell'antro è dolcemente inclinato verso la curvatura del ferro di cavallo, ove determinasi una conca.

Entrando nella grotta, mentre si aspettano le tenebre più fitte, è bello, dopo essersi inoltrato parecchi metri, rivedere il cielo e talora il sole, per una finestra, che fu aperta dall'azione erosiva delle acque meteoriche sul fondo di una piccola dolina a forma di piatto (diametro marginale massimo m. 5: profondità

(8) L'espressione *fenomeno carsico* è usata in questo scritto in senso geologico non geografico.

(9) Tutte le altezze furon prese coll'aneroide e le altre misure col decametro.

m. 1), alla quale gradatamente venne a mancare il fondo. L'antro misura m. 28 in lunghezza ed ha altezza variabile fra un minimo di m. 1.50 ed un massimo di m. 3, ed una larghezza massima di m. 4. Nella curvatura della branca occidentale osservansi due pilastri di forma fusoide, i quali, essendo l'uno rimpetto all' altro secondo la larghezza dell' antro, rivelano che l'erosione chimica dell' acqua si esercitò con diversa intensità sul calcare che occupava l' antro e che questo si ampliò per dissoluzione delle pareti divisorie di tre canali contigui (10). Procedendo più verso l' estremo della branca occidentale, dei tre canali primitivi continua solo il medio, l'antro diviene angusto e presenta sul fondo uno strato, spesso circa 15 cm. di arenaria friabile, che evidentemente rappresenta un deposito delle acque circolanti nella grotta.

All' estrèmo della branca occidentale trovasi la gola di un pozzo (diametro marginale medio m. 1,30; profondità m. 6), il quale in basso dilata, formando un secondo antro, che insieme alla gola del pozzo ha forma di un grosso matraccio. Nell'estremità inferiore della gola del pozzo sono due grossi setti di roccia in posto, i quali agevolano la discesa dell' osservatore essendo capaci di sostenere un uomo.

Il fondo del pozzo è occupato da sabbia calcarea e minuta ghiaia.

Lateralmente il pozzo mostra varii cunicoli, ma nessuno permette il passaggio di uomo, neanche se camminasse carponi.

Nella curvatura dell'antro a forma di ferro di cavallo sboccano due canali, che permettono il passaggio di un uomo. Entrambi hanno bocche sollevate oltre un metro dal fondo, e, dopo breve decorso, si congiungono in un solo canale (largo circa m. 4; alto m. 0,50) con decorso da N a S ed in sensibile pendìo. Strisciando come un rettile, mi fu possibile esplorarne circa

---

(10) Un fatto simile osservò Olinto Marinelli nella grotta di Villanova. Cfr. O. MARINELLI—*Fenomeni carsici, grotte e sorgenti* nei dintorni di Tarcento in Friuli. (Giorn. *In alto* an. VIII).

m. 20 ed ebbi a notare varie fenditure con decorso da E a W, dilatate dalle acque d'infiltrazione, in modo da apparire in sezione come un triangolo.

Visitai la grotta dei Mori varie volte in pieno inverno e la trovai sempre completamente asciutta, nè mai la fiamma della stearica rivelò la minima corrente di aria. Ciò mi fa ritenere che essa non ha altra bocca superiore e che fu scavata esclusivamente per prolungata azione erosiva delle acque d'infiltrazione.

FAUNA — Nel canale più interno catturai due individui ♂ del *Rhinólophus ferrum-equinum, Auct.*; nell'antro anteriore vidi qua e là sterco fresco di *Lepus cuniculus, L.*; vidi pure la *Lacerta communis Wagler* ed il *Platidactylus mauritanicus, Gml.*

FLORA—Raccolsi alcune alghe inferiori non determinate.

LEGGENDA—Come saggio di volgare esagerazione riporto la descrizione della grotta fatta dal Farina (11): « È alto il suo « ingresso poco più di un metro, largo per metà e l'interno che « si dilata ad emisfero, ha presso che m. 4 di diametro, m. 2 $^{1}/_{2}$ « di altezza. Si passa poi in una seconda simile alla descritta « mercè un angusto forame a fior di terra, indi in una terza e « così in seguito per un irregolare raggio circa 3 Km. e si as- « serisce avere il buco di uscita all'opposta contrada di Galati. »

GROTTA DI GALLO—Trovasi nel pendìo incolto di contrada Sabella, pochi passi più a N della casuccia rustica di un tal Gallo, da cui prende nome la grotta. L'apertura d'ingresso è a m. 170 sul mare; ha forma ovale coll'asse maggiore secondo la linea N-S, ed è una dolina puteiforme, profonda m. 3, aperta dalle acque di dilavamento.

Nel primo tratto la grotta descrive un gomito ad W dell'in-

---

(11) V. FARINA—*Le Terme Selinuntine .... ecc.* Sciacca 1864 p. 303.

gresso, poi volge a N e cammina quasi dritta per m. 16, con altezza raramente superante i m. 3 e larghezza di circa m. 1. Quindi trovasi un salto, alto m. 2, 50; salito il quale, trovasi una dilatazione (saletta) a forma di una calotta sferica, scavata in un conglomerato ad elementi pugillari e cefalari. Detto conglomerato contiene anche ferro, che le acque filtranti hanno trasformato in limonite a struttura alveolare. La saletta continua in un condotto, largo m. 2, alto m. 1, discendente a piano inclinato a N: esso è lungo m. 8,50 e sul suo decorso vedesi una vera marmitta di giganti (diametro m. 0, 60; profondità m. 1, 30). Trovasi dopo un secondo salto, alto circa m. 5 e diviso in due gradoni, di cui l'inferiore è alto m. 2, 80; il superiore m. 2, 20. Salito il salto, trovasi una seconda dilatazione o saletta, più grande della prima, ma della stessa forma e scavata anch'essa in un conglomerato ad elementi pugillari e cefalari. Il fondo della saletta è circa cm. 20 più basso del margine superiore del salto. Segue un canale inclinato a N assai basso, che visitai camminando carponi per m. 13, 50. Più oltre il cunicolo è impraticabile.—Tutta la parte praticabile della grotta è lunga m. 45 e nelle varie visite, fatte in gennaio, febbraio e marzo, fu trovata sempre asciutta. Solo talora in qualche angolo osservai scarse goccioline di acqua, pendenti dalla volta, che, illuminate dal lanternino ad acetilene, avevano l'aspetto di perle.

È rimarchevole il fatto che l'aria della grotta è in continuo moto ascendente dal piano al monte, e l'apertura d'ingresso aspira continuamente aria. Quando all'aperto l'aria è in calma, il vento, che si genera nella grotta, ha forza di spegnere la stearica dell'osservatore. Tale moto dell'aria rivela che la grotta ha certamente un'altra bocca più in alto; ma pare che il cunicolo superiore faccia un cammino abbastanza lungo prima d'aprirsi alla superficie terrestre. Nella speranza di rintracciare l'altra bocca, detti alle fiamme un fascio di paglia coperto da cladodi secchi di *Opuntia ficus-indica*, e, benchè la grotta aspirasse come un ottimo fumaiuolo, non si riuscì a vedere il fumo ricomparire all'aperto.

Questa grotta è assai istruttiva, oltre che per la corrente di aria, anche per le due salette, che veggonsi nel posto di maggiore permeabilità della roccia, e per i due salti che, insieme ai rispettivi tratti di canale con pendìo contrario a quello del primo tratto della grotta e al pendìo esterno del terreno, rappresentano due veri sifoni naturali.

Grotta di Ciulla — Trovasi nell' estremità occidentale di contrada Sabella in proprietà di famiglia Ciulla, da cui prende il nome. La bocca guarda il mare in direzione S-W e trovasi a circa m. 160 di altezza: essa fu aperta da acque di dilavamento ed ha forma ovale colla punta in alto (altezza m. 1, 90; larghezza m. 1, 70).

Nel primo tratto la grotta presentasi come una stanzetta, alta circa m. 2 ed ha fondo quasi piano, poi volge ad E e s'incrocia con un secondo canale, formando un pozzetto, e prosegue verso E con fondo a ripido pendìo. Tutto il canale è lungo m. 13; largo da m. 2 a 0, 50 ed ha altezza variabile come la larghezza.

Il canale incrociantesi col primo descritto decorre da N a S con fondo a dolce pendìo e dopo un decorso di m. 9 immette nella gola del pozzetto. Similmente sbocca nel pozzetto un altro ramo, il quale originasi a fondo cieco, assai basso e stretto (altezza m. 1, 50, larghezza m. 1, 30) e con ampiezza quasi uniforme, scende da E ad W per m. 7, poi volge a N e raggiunge la gola del pozzo dopo altri m. 4.

Il pozzetto è profondo m. 2 e verso N continua direttamente in un canale sottoposto all' altro lungo m. 9. Questo canale inferiore può ossevarsi solo camminando carponi e anche con difficoltà per angustia di spazio.

Parecchie volte nella stagione invernale mi recai in questa grotta, ma solo dopo copiose piogge osservai stillicidio delle acque d' infiltrazione ed eccezionalmente trovai un po' di acqua nel pozzetto.

Nel dirupo prodottto dal piano della faglia , oltre che la

grotta vaporosa, si rinvengono la grotta della Molara, Cocalo, Cucchiara, Canala, Leproso, Tachahano.

GROTTA DELLA MOLARA—Prende nome dalla contrada, in cui trovasi, ed apresi per varie bocche a circa m. 150 sul mare. La più grande delle aperture d' ingresso guarda il mare in direzione S ed ha figura ellissoidale (altezza m. 2, 10, larghezza m. 2, 60). La grotta si estende da W ad E ed è lunga m. 24, alta da m. 1 a 7; larga da 2 a 13 m. Il principale diaclasi, che dette luogo alla formazione della grotta è della maggiore evidenza; segue la direzione della linea di faglia e si biforca verso E, onde la grotta mostra da quel lato un piccolo corridoio basso, che circonda un masso. È parimenti visibile un altro diaclasi che s'incrocia col primo e che facilitò la formazione della maggiore apertura d' ingresso. La grotta è tutta scavata nel calcare brecciato del Cretaceo ed al lato N è ingombrata da massi ruiniformi di aspetto svariato. Il fondo è un piano leggermente inclinato verso la bocca principale, innanzi la quale è una conca a forma di piatto, tutta intersecata di fenditure messe in evidenza dall' azione erosiva delle acque. Le acque della grotta in parte trovarono scolo attraverso le cennate fenditure e in parte formarono un rivo scorrente dalla bocca maggiore della grotta, come chiaramente rilevasi da un solco di erosione innanzi l' ingresso della grotta.

GROTTA DI COCALO — Apresi nella parte più alta del pizzo di Ferruzza e fu così nomata da una tradizione puramente orale, la quale reca che Cocalo, re dei Sicani, nascondesse colà i suoi tesori.

La grotta è di difficilissimo accesso: io vi arrivai coll' aiuto del tenente G. Borsa del 28° fanteria, il quale raggiunse l'apertura d' ingresso arrampicandosi alla roccia ed aiutò me a salire colla corda.

L' ingresso è a m. 334 sul mare, guarda il S ed è sufficien-

temente ampio (altezza m. 5; larghezza m. 3). Nell' interno la grotta può dividersi in una parte anteriore molto alta (circa m. 12; larga m. 4, 50), il cui fondo è una conca a fondo di battello ed una parte posteriore risultante da tre canali soprapposti. Il più alto, al tempo della formazione della grotta, riceveva acqua di delavamento da un' apertura, che oggi è una finestra sulla bocca d' ingresso. Il canale scende con dolce declivio da S a N, seguendo l' inclinazione delle assise calcaree. Esso è lungo m. 20 e in due parti del tratto anteriore manca di fondo; decorre sempre basso ed angusto, in modo che appena permette camminar carponi.

Il canale medio è in continuità col superiore, col quale fa angolo a N, scende a ripido pendio verso S, ed è lungo m. 17 con ampiezza sempre sufficiente, perchè l'osservatore possa camminare in piedi. In qualche tratto bisogna camminare sulle terrazze o cornici laterali, poichè il fondo fu nel mezzo completamente eroso dalle acque.

Il canale inferiore è lungo m. 28 dall' ingresso della grotta; si estende a N m. 8 più del canale medio e m. 3 verso S rappresentano la lunghezza della conca anteriore della grotta. Da detta conca si passa nella parte coperta del canale strisciando e salendo un gradone di m. 0, 60. Più in là il canale si amplia fino a potervi camminare in piedi, poi diviene nuovamente basso e termina a fondo cieco. Nell' ultimo tratto presenta alla altezza di circa un metro un terrazzo, che dà immagine di un tavolo a ferro di cavallo. Al gomito del canale superiore col medio, questo manca di fondo e mostra invece un' apertura ovale, quasi gola di pozzo, che mette i tre canali in diretta comunicazione. Evidentemente l' acqua del canale superiore, man mano che, al gomito di sbocco nel medio, erodeva il proprio letto per retrocessione della cascata, scorrendo a getto sempre più alto sul fondo del medio, vi demarcò una conca, che per successiva erosione sfondò nel canale inferiore.

Picchiando sul fondo della conca anteriore, odesi una riso-

nanza, che fa sospettare altra soluzione di continuità nella roccia. Ciò mi fa ritenere che le acque della grotta in parte trovarono scolo nella roccia sottostante attraverso piccole fenditure.

La grotta è scavata nel calcare brecciato del Nummulitico ed il diaclasi, che favorì l' erosione chimica e meccanica delle acque, è evidentissimo per la soprapposizione dei tre canali e può osservarsi anche nella roccia sottostante.

Circa m. 50 più giù della grotta di Cocalo trovasi una balma in forma di una barchetta (lunga m. 5, larga m. 0, 80; profonda m. 4) avente il fondo occupato da ciottoli angolosi gittati dalla bocca.

Visitai la grotta di Cocalo e la balma sottostante il 21 Dicembre 1902, dopo abbondanti piogge, e le trovai completamente asciutte.

FAUNA — La grotta di Cocalo costituisce l' abituale dimora della *Columba livia*, L., di cui vidi ovunque stèrco secco e fresco.

FLORA — Nella parte anteriore della grotta e sulla parete di E vegetava un bel cespuglio di *Parietaria officinalis L.* e le pareti eran quasi totalmente coperte di una piccola alga verde, di cui raccolsi un saggio non ancora determinato.

GROTTA DI CUCCHIARA — Trovasi nella zona più bassa della parte alpestre del monte ad W del pizzo di Ferruzza ed a circa m. 270 sul mare. Apresi per due bocche che guardano il S; la maggiore ha forma ovale (alta m. 2; larga 1) la piccola ha figura ellissoide (altezza m. 0, 90; larghezza m. 0, 70).

Entrando nella grotta trovasi un primo antro esteso da E ad W, lungo m. 9, 80 largo m. 2; alto m. 3. Esso comunica col canale posteriore a mezzo di un cunicolo sottoposto ad un masso, sito a destra di chi entra nella grotta e con un' ampia apertura rimpetto la bocca principale. Tale apertura è semisbarrata da una grossa pietra.

Il canale posteriore decorre da N (ove iniziasi con due rami a fondo cieco) a S per circa m. 20 con ampiezza variabile (altezza massima m. 4 ; larghezza m. 3,50). Una sezione trasversale del canale darebbe immagine di un arco gotico, tanto è evidente il diaclasi, che favorì l' infiltrazione delle acque.

Il fondo, sia dalle aperture d' ingresso, che dagli estremi posteriori del canale principale, inclina verso una conca centrale, tutta ingombra di sfasciume di materiali, evidentemente franati dalle pareti e dalla volta.

La grotta è scavata in una lente di calcare brecciato del Titonico ed evidentemente la forma fu determinata da due diaclasi, uno diretto secondo la frattura del rigetto e l' altro quasi normale al primo ; la grotta è effetto di erosione di acque di dilavamento e d' infiltrazione; quelle ingrottarono per le bocche di ingresso, e queste vidi talora io stesso stillare qua e là dalla volta.

Fauna — In questa grotta vidi qualche individuo o del *Rhinolophus ferrum-equinum*, *Auct.* ed un *Lithobius forficàtus*, *L.*

Grotta di Mastro Vito Canala — È così chiamata dal nome di uno scalpellino, antico proprietario del fondo. Apresi per due bocche, poste una accanto all' altra a m. 285 sul mare ed una retta, tirata dalla grotta vaporosa in direzione del S, la incontra fra i primi alberi di mandorlo.

La bocca piccola è nascosta tra due piante di Opuntia e mena in una nicchia a forma di una calotta sferica, la quale posteriormente continua in un cunicolo, che sbocca nel canale adiacente, facendo un salto di m. 1,20. Il cunicolo è lungo m. 11 e funziona come un naturale ventilatore della parte più interna della grotta, imperocchè la fiamma di una stearica rivela una corrente d' aria, ordinariamente di dentro in fuori ; ma che talora (dopo il tramonto delle belle giornate) s' inverte.

La bocca grande ha forma ovale colla punta in alto (larga m. 2, alta m. 5).

La roccia soprastante mostra una profonda insenatura con superficie liscia e rivela, che un ruscello, cadente di là, per retrocessione della cascata ingrottò sempre meglio le sue acque.

Dall'apertura d'ingresso si scende per ripido pendìo in una sala quasi rettangolare (lunga m. 9; larga 2, 50; alta 5), che posteriormente immette in due canali. Il canale di W comincia angusto (bocca larga m. 1, 40; alta m. 1, 70) ma più in dentro la sua altezza si eleva tanto che illuminando la grotta con una stearica, legata sopra una canna, appena si riesce a vedere la volta. Esso è lungo m. 12; quasi a metà della lunghezza mostra lo sbocco del cunicolo, proveniente dalla bocca piccola della grotta, e posteriormente si continua anch'esso in un cunicolo impraticabile all'uomo, confluisce cogli altri canali della grotta in 2 pozzi sottoposti, che saranno appresso descritti. Il canale dell'E della sala descritta è anche più angusto del precedente (alto m. 1, 40; largo 1, 15), scende a piano dolcemente inclinato per m. 7, indi raggiunge il piede di un salto e devia a destra per confluire in un terzo canale più ad E della bocca grande.

Superato il salto, di m. 3, l'osservatore trovasi alla confluenza di quattro canali; due provenienti da E e due da W. I due canali dell'E iniziansi entrambi a fondo cieco e scendono ripidi ed angusti (l'interno è lungo m. 14; l'esterno m. 10), poi si congiungono in uno, che forma un salto di circa m. 4. Dei due canali dell'W, uno non si potè esplorare per mancanza di una scala, giacchè esso forma un salto di m. 5 con roccia liscia ed erosa quasi perpendicolarmente. Tale salto è perfettamente rimpetto l'altro dei canali dell'E. — L'altro canale che è un ramo del primo non visitato, iniziasi con un'ampia apertura circa un metro distante dal labbro superiore del salto, decorre molto ripido da W ad E e si apre sul salto di m. 3 alla confluenza degli altri tre canali.

Nella storia della formazione di questa parte posteriore della grotta, evidentemente fu un tempo in cui i varii ruscel-

letti univano le loro acque sopra una fenditura, attraverso la quale trovavano scolo; poscia col dilatarsi della fenditura, si formò una gola di pozzo, in cui le acque precipitavano da due lati opposti; si determinarono così le due cascate, che colla continua retrocessione contribuirono all'ampliamento della grotta.

Il canale ad E della bocca grande iniziasi a fondo cieco, e, nel primo tratto, largo e basso, è tutto adorno di piccole stalattiti e stalagmiti, decorre per circa m. 16 basso ed angusto e, dopo aver ricevuto lo sbocco del canale medio della grotta (E della scala), va a sboccare in un pozzetto sotto i salti innanzi descritti.

Il pozzetto è profondo m. 3 e presenta sulla parete dell' W un grosso foro per cui si passa in un'antricciuolo, adorno di festoni di calcare stalattitico e col fondo pur occupato da incrostazioni come colate venute a più riprese.

Più a N del primo pozzo trovasi un secondo pozzo, al quale si perviene camminando carponi in un angustissimo canale lungo m. 3. Questo pozzo ha diametro marginale di m. 1, 20 e profondità di m. 3, 50: trovasi sulla confluenza del canale di accesso con un altro laterale, di cui non è possibile seguire il corso per angustia di spazio. Un tempo questo pozzo ricevè direttamente le acque del canale E della sala e ciò quando il detto canale aveva il fondo circa un metro più alto e continuavasi in un cunicolo, la cui apertura vedesi sul fronte del salto. Tale cunicolo raggiunge il pozzo dopo un decorso di m. 5. Il fondo del pozzo è inclinato verso il S e presenta un foro del diametro di circa un dcm. pel quale trovarono scolo le acque della grotta. Attualmente per detto foro penetra una corrente di aria così forte da speguere la fiamma di una stearica e produce un rumor cupo da intimidire gli inesperti.

La grotta è tutta scavata nel calcare del Titonico e rappresenta il piccolo circo o bacino di ricevimento di un antico ruscello sotterraneo, che (come rivela la corrente di aria) più giù versò all'aperto le sue acque, o ha altri meati di ricevi-

mento, pei quali aspira aria. Le acque di tale ruscello furono acque d'infiltrazione, le quali alimentarono e scavarono i canali che s'iniziano a fondo cieco ed acque di slavamento che formarono e dilatarono i canali in diretta continuità colle bocche della grotta. La grotta è scavata secondo due diaclasi principali e normali, dai quali diramano altri diaclasi secondarii. I due pozzi sono sull'intersezione dei diaclasi.

La grotta è riferibile al tipo *goule*, proposto del Martel. (12)

FAUNA — Fra i ciottoli che ingombrano la sala vidi la *Scolopendra morsitans*, Gerv. e nei pozzi catturai due specie di Ortotteri non ancora determinati.

LEGGENDA — Riporto dal Farina: « Qui si trova una di quelle grotte spettacolose, la quale credesi perforare il monte in tutta la sua lunghezza ». V. Farina — *Terme selinuntine pag. 85.*

GROTTA DEL LEPROSO — Trovasi nel dirupo sottoposto alla Stufa, a m. 320 sul mare, e fu così nomata dal fatto che un leproso curò la sua infermità, usufruendo dei caldi vapori della grotta.

Due bocche guardanti il mare dalla medesima altezza ed in direzione S, una distante dall'altra m. 10, vi danno adito.

Tali bocche furono aperte dalle acque di dilavamento, che nelle piogge copiose, ingrottano per esse. Entrambe hanno forma ovale colla punta in alto (la bocca di sinistra è alta m. 1, 50, larga 1 ; quella di destra è larga m. 1, 90, alta 2, 10) ; e conducono rispettivamente in una saletta quasi quadrangolare (ognuna è larga m. 4 ; alta 2). Le due salette comunicano tra loro a mezzo di due bassi canali, che in sezione trasversale apparirebbero come due losanghe separate da un setto. La distanza

(12) E. A. MARTEL. *La spéléologie ou science des cavernes*. Paris 1900. G. Carrè e G. Naud.

massima dall' angolo di una saletta e quello dell' altra è di m. 20.

Ciascuna saletta continua posteriormente in un angusto canale.

Il canale della saletta sinistra, dalla bocca prospiciente al posto praticabile misura m. 13 ed ha in fondo un foro, donde emanano gas (O; N; CO_2) e vapori di acqua, proprio come nella grotta vaporosa, nel cui camino, con ogni probabilità, il detto canale confluisce.

L' altro canale è lungo m. 23 e raggiunge un' altezza massima di m. 5; in principio è sufficientemente largo, ma, come si progredisce nell' interno diviene sempre più angusto e presenta a circa un metro di altezza due terrazze o cornici laterali, una di fronte all' altra, che rappresentano un antico letto delle acque della grotta. Il fondo del canale va dolcemente scendendo verso l' interno fino a raggiungere una conca, che dilata in uno antricciuolo bassissimo; più oltre sale in sensibile pendìo.

Verso il tramonto del 26 aprile 1903 il termometro segnò 37°C nel canale vaporoso e scese fino a 13°C nella conca del ramo senza vapori.

La grotta fu scavata da acque d' infiltrazione e di slavamento ed è riferibile al tipo *goule*.

Fauna — Nel canale senza fumarola rinvenni un grandissimo numero del *Rhinolophus ferrum-equinum*, *Auct* pendenti a catene dalla volta.

Flora — Le pareti delle due salette sono quasi completamente ricoperte di un' alga verde incrostante, di cui raccolsi un saggio ed in qualche angolo trovasi pure qualche meschina fronda di *Adiantum capillus-Veneris* L.

Grotta di Tachahano o dell' eco — Trovasi all' estremità occidentale del rigetto, vicino la via di Tayno ed ebbe da-

gli Arabi il nome di Tachahano dal fatto che contro la roccia, in cui è scavata la grotta, formasi un' eco distinta. (13)

Apresi a circa m. 260 sul mare ed ha adito ellittico, alto metro 6, largo 3.

Nell' interno le dimensioni gradatamente si riducono e tutta la grotta non è lunga più di m. 8. Il fondo ha ripido pendìo verso l' esterno. La roccia circostante l' apertura d' ingresso ben lisciata rivela con evidenza l' azione erosiva delle acque di slavamento, che scavarono la grotta. Fin dal 1864 fu chiusa anteriormente da un muro ed utilizzata per bisogni dell'agricoltura.

Qualche passo a sinistra della grotta vedonsi a varia altezza dal terreno coltivato varii fori carsici. In uno di essi, che ha fondo inclinato verso l'interno, trovasi un vero conglomerato ad elementi avellanarii, che rappresenta un residuo di minuta ghiaia in preda alle acque, le quali scavarono il foro stesso.

GROTTA DI MANGANO — Trovasi alquanto più sopra Tachahano, a circa m. 320 sul mare. La bocca guarda il N-W ed è larga m. 2,50, alta 1,20; è lunga m. 8 e si va gradatamente restringendo come si procede nell' interno. È tutta scavata nelle marne bianche del Nummulitico e presenta pochissimo interesse.

I fatti rilevati conducono alla conferma dei principii fondamentali dell' idrologia sotterranea, già stabiliti dal Martel ed altri speleologi e cioè:

1. Nei terreni calcarei i diaclasi e le giunte regolano la circolazione acquea del sottosuolo.

2. Le sale si manifestano nei punti, dove le acque dovettero soggiornare e però vi esercitarono più intensa azione erosiva.

3. I bacini idrografici del sottosuolo tendono continuamente ad abbassarsi.

---

(13) Alcuni scrittori credettero che l' eco fosse nella grotta. Questo grossolano errore provenne da una cattiva interpretazione del seguente passo del Fazello: Specus.... destrorsum obvia est, unde vocis etiam eminus emissae Echo responsa refert.

Fenomeni pseudovulcanici.

Il S. Calogero può considerarsi come tipo dei monti pseudovulcanici.

Nella vetta è la grotta vaporosa, che asconde nei suoi recessi il pseudo-cratere, da cui vien fuori una colonna di fumo visibile talora anche a parecchi Km. di distanza. Presso la grotta vaporosa, nello scoscendimento prodotto dalla frattura del rigetto, vedonsi disseminate numerose fumarole, dette nel paese *Bagnicelli* che corrispondono ai campi di fumarole dei veri crateri. Altre fumarole, allineate sul dorso e sui fianchi del monte, ricordano le fenditure dei coni vulcanici. Infine, ai piedi del monte e per la massima parte aggruppate agli estremi del suo asse maggiore (cioè nella valle dei bagni e nell'alveo del Carobollace) si osservano le sorgenti termo-minerali, le quali, come notò il Baldacci (14), pare abbiano qualche relazione colla frattura del rigetto.

Con fenomeni anologhi a quelli dei veri vulcani, ma ridotti a più semplice espressione, il S. Calogero ha piccoli parossismi (15), periodi di semplici emanazioni ed anche di calma.

---

(14) BALDACCI — *Descrizione geologica dell' isola di Sicilia* — Roma 1886.

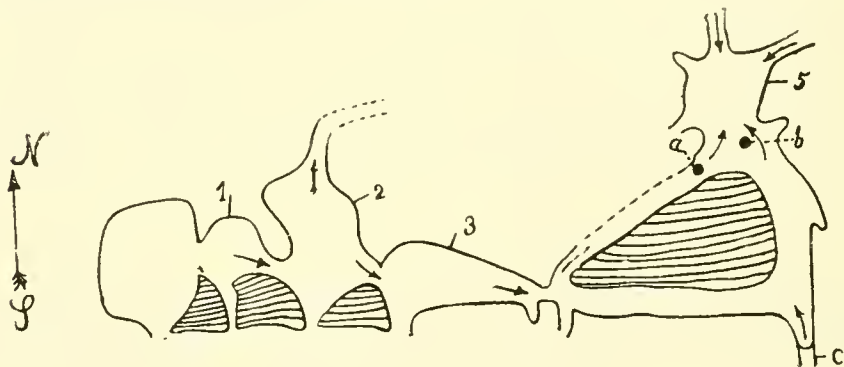
(15) Scarse notizie si hanno sui parossismi delle stufe di Sciacca. Si hanno notizie dei parossismi coincidenti con periodi di gravi terremoti degli anni 1727, 1817 e 1831. Ecco ciò che scrive il Savasta in rapporto agli avvenimenti del 1827: « Alli 26 detto (settembre) venerdì, ad ore 4 di notte, si fece sentire nelle viscere della terra un tuono orrendo, che intimorì tutti quelli che lo sentirono — vi fu chi vide nel territorio, chiamato dagli Sciacchitani « *Mandra Rossa* » che essendo scoppiato un terremoto, si aprì una voragine e da essa uscì un' esalazione infuocata, che puzzava di zolfo, benchè portandosi molti curiosi ad osservarla, ritrovaronla chiusa. Altri videro uscire nel territorio *Mangiapira* una trave di fuoco. che andossi a precipitare lungi da essi. Molti, che nel tempo del terremoto si trovarono alle stufe del S. Calogero videro che da quelle grotte uscirono fumi e vapori accesi al doppio dell' usato. » Savasta — *Istoria dell' orrendo terremoto di Sciacca nel 1827*. Palermo 1829.

Rispetto agli avvenimenti del 1817 leggesi nella Biblioteca italiana (settembre 1817) il dì 14 gennaio verso le 3 p.m. si sentì a Sciacca un terribile tuono sotterraneo seguito da gagliardissimo terremoto....... Nel 19 si sparse un sensibile odore di zolfo nell' aria e la Stufa emetteva una colonna di fumo, che scintillava fuoco.

Più incerte sono le notizie riguardanti il parossismo del 1831, giacchè mentre Hofmann registra che il 18 luglio alle stufe di Sciacca si udirono rumori sotterranei assai più forti dell' usato, Gemmellaro scrive: « Replicate osservazioni si son fatte da quel giorno (14 luglio) in poi nei bagni termali e nelle stufe di S. Calogero, per vedere se alcun cambiamento quelle soffrissero dalla nascita del nuovo vulcano, ma nessuna sensibile variazione si è notata » — C. GEMMELLARO. *Relazione del nuovo vulcano sorto dal mare fra Sciacca e Pantelleria* — Catania 1831.

Dalla descrizione, che segue, il lettore non tarderà ad accorgersi, che le fumarole, allineate sul dorso e sui fianchi del monte, e la stessa grotta vaporosa sono soluzioni di continuità, effettuate da acque di dilavamento e d' infiltrazione lungo due diaclasi, diretti secondo gli assi del monte, e che i *Bagnicelli* rappresentano altre soluzioni di continuità su diaclasi irradianti dal pseudo-cratere.

Grotta vaporosa.

Trovasi a circa m. 370 sul mare (T. I. G. M.) e fu dall' uomo, che spesso per sua comodità si compiace deturpare l' opera di natura, divisa in varie parti, che si appellano: Eremo, Stufa degli Animali, Antro di Dedalo e i riposti recessi, cui dò il nome di spelonca Fazello per ricordare il nome dell' autore, che prima li descrisse.

Pianta della grotta vaporosa — (*Planimetria*) *Scala 1 : 500*

1. Eremo. — 2. Stufa degli animali — 3. Antro di Dedalo. — 4. Spelonca Fazello. — 5. Pseudocratere. — *a* Sasso caduto. — *b* Colonna naturale. — *c*. Antricciuolo fumante. I tratti interlineati rappresentano roccia in sito e le frecciolinе indicano il pendio del fondo.

EREMO — È la parte più occidentale della grotta; un tempo fu in diretta continuazione colla stufa degli animali, ma oggi n' è divisa da un muro.

Il nome eremo venne della tradizione affermante che in questa parte della grotta menò vita eremita S. Calogero, il quale

fu mandato ad evangelizzare il popolo della vicina città e benedire le stufe, che suscitavano terrore nell' ignoranza degli avi del V secolo.

L'apertura d'ingresso guarda il mare e mena in una sala a forma di un grosso tronco di piramide quadrangolare (lunghezza m. 5, larghezza m. 3, altezza variabile da 3 a 7 m.), che sulle pareti mostra caratteristica l'erosione chimica delle acque o nella volta l'ablazione in una marna azzurrognola. In questi ultimi anni (1883) l' ingresso fu modificato per adattarvi un cancello di ferro e fu spianato anche il fondo, perchè si volle trasformare la sala in sepolcro, nondimeno vi è sempre tanto da leggervi la storia naturale di sua formazione. La sala è ben illuminata ed ha a sinistra un' apertura, che mena in un antro (lungo m. 3, largo ed alto m. 2), il quale è scarsamente rischiarato dalla luce diffusa dalle pareti della sala. Rimpetto all' ingresso è il muro che divide l' eremo dalla stufa degli animali ed addossato al muro un rozzo altarino. A S è un secondo antricciuolo, il quale appena può contenere un uomo giacente e comunica all' aperto con uno spiraglio, pel quale penetra luce e talora acqua. Il fondo ed il tetto mostrano risentito pendìo verso l' interno e rivelano che il lavorio dell' acqua fu favorito dall' azione delle giunte.

Nelle frequenti visite da me fatte il 1902 e 1903 l' eremo fu sempre trovato completamente asciutto.

Stufa degli animali — È la seconda parte della grotta e trovasi ad E dell' eremo. L' apertura d' ingresso ha forma ovale col grande asse orizzontale e dista dal cancello dell' eremo metri 5, 30. La stufa in parola è un antro (lungo m. 13 ; largo 5 ; alto da 1 a 3) ; il fondo ed il tetto hanno regolare pendìo verso N secondo l' inclinazione degli strati. Bisogna però tener presente che il fondo fu abbassato di circa 25 cm., come chiaramente rilevasi dai colpi del piccone nella zona bassa delle pareti dell' antro. Posteriormente l' antro continua in un cunicolo impraticabile all' uomo, donde emanano caldi vapori di acqua e gas

($O : N ; CO_2$) ed al lato orientale è un canale, oggi chiuso da un muriccio, che immetteva direttamente nell' antro di Dedalo. Temperatura 36°C (dì 14-6-1903).

Antro di Dedalo — Trovasi ad E della stufa degli animali ed ha un ingresso proprio, che guarda il mare e dista dalla bocca della stufa degli animali m. 7. L' architetto ateniese, verso il XII secolo avanti l' era volgare, lo avrebbe dilatato ed adottato all' uso dei bagni.

L' antro ha forma di una cornamusa colla punta verso scirocco: è lungo m. 9 ed ha larghezza ed altezza massima di m. 4. Il fondo ed il tetto han risentito pendìo verso scirocco; ma il tetto presentasi nel mezzo più ampiamente scavato, indicando essersi colà esercitata più intensa azione erosiva. L' antro è lateralmente munito di sedili di pietra, su cui si adagiano gl' infermi, che prendono le stufe.

Temperatura 38°C. (dì 14-6-1903).

Spelonca Fazello (16) — Attraversando carponi un foro, che trovasi ad E dell' antro di Dedalo (detto foro è lungo circa un metro e nella pietra, rotta a facce piane, mostra essere stato dilatato dall' uomo) si perviene nella spelonca Fazello. Questa ha un canale diretto da W ad E, che è la continuazione diretta dell' antro di Dedalo, lungo m. 17 con larghezza ed altezza massima da m. 3 a 4. Il canale riceve agli estremi due diverticoli provenienti da S, e di essi quello presso l' antro di Dedalo corrisponde al cosiddetto buco dell' orecchio, l' altro si apre all' aperto in un' antriccinolo fumante, sito circa 20 m. ad E del buco dell' orecchio. I due diverticoli scendono con accentuato pendìo

(16) In eo (*antro*) ad dexteram spelunca est natura quoque latissima ad cuius aditus laevam naturalis est puteus profundissimus, quem plures, quod descensus eius non praeceps adeo, sed prope placidus sit, accensis facibus et funibus directi, ausi sunt perscrutari. Ceterum cum eo aliquot passus descendissent, stillicidiaque calentis acquae complura ex viva rupe uberrima defluentia offendissent, et in viarum ambages primum ac deinde in angustias incidissent, horrore metuque a progrediendo abducti, ne suffucati interirent, ad suprema reversi sunt. Fazellus—*De Rebus siculis,* Dec. I, lib. VII—p. 274.

nel canale principale, che presenta leggerissima inclinazione verso il foro dell' antro Dedalico.

A sinistra del foro dell' antro Dedalico e in continuazione del diverticolo, proveniente dal buco dell' orecchio, ai tempi del Fazello, era un canale, che di preferenza era battuto dai visitatori, che spingevansi fino alla bocca dello pseudocratere; tanto vero che l' illustre storico accenna solo a quel canale e passa a descrivere la voragine fumante, senza accennare ad altra via. Bellitti descrive l' altro ramo del canale.

Frattanto il 7 luglio 1903 io trovai il detto canale rapidissimo e tutto coperto di fango di argilla azzurra, in modo da spaventare il solo pensiero di tentare la discesa per esso. Pare perciò che il canale descritto dal Fazello ne avesse un altro sottoposto e che il suolo del primo sia franato nel sottostante in qualche parossismo del pseudovulcano.

Il diverticolo del lato E prosegue direttamente in un altro canale che va a sboccare nella voragine del pseudocratere. Questo canale è lungo m. 14, largo da 2 a 3 m. ; alto da 2 a 6 e presenta un doppio scorrimento determinato da una leggera insellatura. Presso la bocca del pseudocratere è una grezza colonna di calcare dolomitizzato. La colonna è quasi rimpetto il canale descritto dal Fazello ; quale canale mostra a questo estremo il gran sasso caduto (probabilmente durante i parossismi del 1727) e descritto la prima volta del Bellitti.

Ligai una forte corda alla colonna in parola e poi sorreggendomi colla destra alla corda e portando nella sinistra una lampada a gas acetilene, potetti scendere alquanto nella bocca dello pseudocratere e spingervi lo sguardo. Lo pseudocratere ha forma di imbuto e numerosi canali confluiscono nella parte lata di esso.

Fra tutti se ne distinguono due per ampiezza, uno scendente dal N trovasi quasi rimpetto la colonna, l' altro proveniente da E corrisponde meglio al sasso caduto ; entrambi mostrano ripidissimo pendio e un deposito di melma gialletta presso lo sboc-

co. L' interno dello pseudocratere era quasi uniformemente coperto di uno strato di fango di argilla azzurra. Il termometro, posato presso la colonna segnò 40°C.

La grotta vaporosa è scavata nel Titonico a contatto col Nummulitico ed il pseudocratere corrisponde all' incrocio di due diaclasi normali e diretti secondo i punti cardinali. Nella formazione della grotta l' erosione chimica e meccanica delle acque si esercitò a preferenza lungo i diaclasi e le giunte, ma l' azione delle giunte prevalse. La grotta è riferibile al tipo *goule* del Martel.

La grotta vaporosa, precipuamente d' inverno, agisce come un condensatore del vapore acqueo, che, ripreso lo stato liquido, prima scioglie l' anidride carbonica emanata dallo pseudocratere e poi il calcare dei varî canali, ove scorre; in altre parole il dinamismo del pseudovulcano sostiene il fenomeno carsico.

Fumarole.

Trascurando la descrizione dei cosidetti Bagnicelli, che mostrano maggiore incostanza nella loro attività e non pare abbiano grande valore scientifico, descriverò le fumarole che mettono in evidenza i due diaclasi, i quali incrociantisi nella voragine dello pseudocratere dividono il monte in quadranti.

Le fumarole della linea E-W sono generalmente allineate sul labbro superiore del rigetto.

1. Ad E della grotta vaporosa trovasi una sola fumarola, che dista circa m. 320 dalla cima del monte e si apre nel cosiddetto antro della *Quaquera*, sito pochi passi più a S della casa colonica del Sig. F. Scaglione. È un antricciuolo quasi completamente interrato dal terriccio, accumulato dalle acque meteoriche; ha circonferenza di circa m. 4 e dà vapore per una giunta. Temperatura 28 C.° (14-6-1903).

2. Ad W della grotta vaporosa e distante circa m. 50 da essa trovasi un altro meato fumante, conosciuto dai terrazzani

col nome di *buco rumoroso*, datogli dal Fazello. Ha diametro di cm. 10 e s' interna nelle marne del Nummulitico con ripido pendio verso N. Il buco rumoroso mena certamente in una grottucola, giacchè io vi introdussi una canna lunga oltre due metri e questa muovevasi liberamente in tutti i sensi. Il calcare soprastante il foro fumante mostra una scanalatura a superficie liscia, quasi doccia prodotta dal dilavamento. Temperatura 37° C.

3. Un terzo meato fumante dista dal precedente m. 150 ed apresi a fior di terra come bocca di un pozzetto (l' apertura ha forma ovale con diametro marginale massimo m. 0. 90; minimo 0,70) si approfonda nella roccia oltre un metro e piega verso la grotta vaporosa in una fenditura dilatata dalle acque meteoriche Temperatura 32° C. (14-5-1903).

4. Un' altra fumarola dista dalla precedente m. 120 e trovasi a destra di chi scende per la via sul ciglione della Scalilla. La bocca guarda il S ed ha perimetro di circa 1 m. Temperatura 27° C. (14-5-1903).

5. Il quinto meato fumante dista dal precedente m. 60 e trovasi sul terrazzo, che mena al cosiddetto telegrafo vecchio. La bocca guarda il S-W ed ha perimetro di circa m. 3; immette in una grottucola che prima si estende secondo la frattura del rigetto, poi piega a N. Temperatura 35° C. (14-5-1903).

6. Qualche metro sotto il precedente ed in posto di non facile accesso trovasi un' altra fumarola. Il meato ha forma di imbuto col diametro marginale di cm. 37. Temperatura 34° C. (14-5-1903).

7. Il più basso meato fumante trovasi a circa un km. dalla cima del monte ed Etm. 2 più in giù della grotta di Tachaliano. Ha circa cm. 50 di circonferenza e s' interna nella roccia con fondo inclinato secondo la linea del rigetto. Temperatura 29°C. (14-5-1903).

Il diaclasi della linea N-S evidentissimo nella spelonga Fazello per i due canali, che sboccano in perfetta corrispondenza nella voragine dello pseudocratere, non è così evidente esterna-

mente se non per piccolo tratto in direzione S. Pare che su questo diaclasi si trovassero alcune fumarole (oggi completamente spente), cui accenna il Bellitti a pag. 37 :

« Nel corpo stesso del monte in una collina a tramontana, nel luogo delle *Chiari* .... sonvi diversi buchi da cui fumo caldo e vaporoso esala ».

1° Il primo meato fumante a S dello pseudocratere comunica colla stessa grotta vaporosa e corrispondente all'estremità S del canale N-S della spelonca Fazello. Ha perimetro ellittico molto allungato (asse orizzontale m. 2, 50 ; asse verticale m. 1. Il caldo vapore vien fuori da una giunta, che è incrociata da piccoli diaclasi. Temperatura 35° C. (14-5-1903) (17).

2. La seconda fumarola trovasi circa m. 20 più giù dell'antricciuolo descritto. I vapori vengon fuori da un foro del perimetro di m. 0,50, che s' interna nella roccia scendendo a ripido pendio verso N. Le emanazioni si compiono con grande intensità. Teperatura 37° C. (15-5-1903).

3. La terza fumarola trovasi m. 102 più giù della precedente e sul medesimo diaclasi secondo il quale più in basso si formò la grotta di Cucchiara o secondo un altro molto vicino. Il vapore vien fuori da un foro orbicolare del diametro di m. 0, 40, profondo m. 3, che scende ripidamente verso N, continuando in una fenditura, visibile per oltre un decametro. Temperatura 26° C. (14 5-1903).

Le emanazioni del pseudocratere e delle varie fumarole sono precisamente le stesse. L'analisi fatta dal Zinno, sopra 10 litri di vapore, presi nell'antro di Dedalo, fornì i seguenti risultati calcolati sopra un litro :

O	cmc. 137	H_2O	cmc. 479
N	» 365	HCl.	» 003
CO_2	» 014	H_2S.	» 002

(17) Circa m. 8 più ad E ed in basso è la grotta delle Pucelle, che è capace appena di ascondere un uomo accoccolato. Ebbe l'onore di essere descritta dal Fazello per la grande intensità delle emanazioni : oggi è fumarola spenta.

A che cosa è dovuto il rumor cupo, che odesi presso quasi tutte le bocche fumanti? È esso causato da acque termo-minerali scendenti quasi in conduttura naturale dalla cima del monte alla valle dei bagni, ove verrebbero all' aperto, come credettero gli scrittori delle terme selinuntine?

Recisamente no e per molte ragioni.

Prima perchè lo pseudo-cratere non funziona affatto come un *geyser* e le volute acque, in cima al monte, restano sempre un parto della fantasia. Secondo perchè mentre la temperatura delle emanazioni vaporose raggiunge appena i 40° C., quella delle acque solfuree è quasi costantemente di 58° C., e questo sbalzo di temperatura sarebbe incomprensibile, giacchè le acque man mano che fluirebbero nel basso dovrebbero perdere non guadagnare calorico. Terzo perchè, essendo le acque termali prevalentemente sulfuree; l' H_2S dovrebbe essere un prodotto costante ed abbondante fra le emanazioni delle fumarole e intorno alle bocche fumanti non dovrebbero mancare piccole sublimazioni di zolfo; invece l' analisi rivela appena tracce di H_2S e le sublimazioni mancano completamente.

Causa fisica del suono sono le vibrazioni melecolari dei corpi elastici, nel caso nostro corpi vibranti sono i gas ed i vapori delle fumarole. Or siccome nei fluidi l' elasticità è destata unicamente da variazioni di volume o di densità, e nelle fumarole queste variazioni sono continue per *l' intermittenza delle manifestazioni endogene*, in questa trovasi la causa prima del perenne rumore.

Perchè alcune fumarole col tempo si spengono ed altre in altri posti si manifestano? Lo spegnersi di alcune fumarole è dovuto ad obliterazione dei meati, per cui il caldo vapore viene all'aperto; e tale obliterazione può verificarsi per accumulo di detrito trascinato da acque torrenziali lungo qualche canale; per piccole frane sotterranee e per incrostazioni calcaree, che lentamente crescendo finiscono per chiudere completamente i meati sotterranei.

La comparsa di nuove fumarole può essere causata o da ter-

remoti e parossismi del pseudovulcano, per cui si aprono nuove fenditure in continuità con quelle fumanti o da infiltrazione di acque, che aprono nuovi diverticoli ai vecchi canali.

Probabilmente il pseudovulcano ha unico camino ed unico pseudo-focolare. Ciò parmi attestato dall' inclinazione dei cunicoli delle fumarole, i quali convergono verso il camino del pseudo-vulcano, non che dalla temperatura e dall' intensità delle emanazioni, decrescenti a misura che si scende sui fianchi del monte.

CONCLUSIONE

Le grotte descritte si formarono coll' odierno regime pluviale o sono riferibili ad altro regime pluviale più o meno remoto ?...

E la manifestazione esterna dei fenomeni pseudo-vulcanici in che epoca avvenne ?...

Le osservazioni dirette da me fatte in varie grotte, per due anni consecutivi ed in pieno inverno, mi addimostrarono uno stillicidio più o meno copioso e, solo dopo piogge dirotte, parziale dilavamento di qualche canale ; oltre che la pioggia è oggi generalmente scarsa in Sicilia e principalmente sulla costa meridionale (a Siracusa la media dei giorni di pioggia è 72, 8 in un anno, mentre ad Udine è 273 (18). Questi fatti e sopratutto l'arenaria della grotta dei Mori ed il conglomerato ad elementi avellanarii, trovato in un foro carsico ad E della grotta di Tachahano, debbono far ritenere che l'attività dei fenomeni carsici esercitasi affievolita e ad intermittenza ; però la formazione delle grotte deve riferirsi ad altra epoca geologica , durante la quale le speciali condizioni climatologiche determinavano una precipitazione atmosferica assai più copiosa dell' attuale.

Chi volesse approssimativamente fissare l' epoca di maggiore attività dei fenomeni carsici del Cronio, bisogna che risalga fino

(18) A. ISSEL — *Compendio di Geologia* pag. 52. Torino 1896.

all' origine dell' era quaternaria (epoca diluviale), quando vivevano generalmente in Europa, e specificatamente in Sicilia l' *Elephas antiquus* e l' *Hippopotamus sp.*, di cui si raccolsero avanzi nella grotta di S. Ciro presso Palermo; la *Hiena brunea*, l' *Ursus arctos*, l' *Elephas africanus*, di cui si raccolsero avanzi nella grotta di S. Teodoro (territorio di Messina) (19). Allora il littorale della Sicilia non era completamente emerso dal mare postpliocenico, che deponeva quei sedimenti (panchina, calcari a Litotamni...) che i geologici distinguono col nome di *piano siciliano* e su cui sorgono ora ricche e popolose città, come Trapani, Marsala, Mazzara di Sciacca. In quel tempo si manifestò uno straordinario incremento nella precipitazione atmosferica, la quale a sua volta provocò grande intensità nei fenomeni di erosione; allora le grotte del Cronio, in gran parte abbozzate, accoglievano gran copia di acque, che lentamente le dilatavano erodendone le pareti ed il fondo. Fra tutte, quella più in alto del monte dovè primeggiare per la quantità di acqua, che ricettava e che vi scorreva dalle varie bocche e canali confluenti in essa.

Tale acqua favorita dall' incrocio dei diaclasi, a lungo volgere di anni, andò lentamente scavando la profondissima gola del pozzo centrale, il cui fondo, gradatamente abbassandosi nella crosta terrestre, dovè pervenire in sito, ove domina un alto grado geotermico. Colà le acque cominciarono a vaporizzarsi sviluppando anche O; N; e CO_2, che avevano in soluzione. Tale fenomeno potè manifetarsi lentamente o anche impetuosamente in seguito a scotimenti sismici, che aprirono nuove fenditure nelle viscere del Cronio; ma certo si manifestò quando la grotta aveva già l' odierna configurazione, e perciò o alla fine dell' epoca diluviale o durante la successiva epoca delle alluvioni. Allora la colonna vaporosa apparve sul Cronio e la gola del pozzo centrale della spelonca Fazello si mutò in pseudocamino, la

(19) Cfr. C. F. Parona. *Trattato di Geologia* — Casa editricè F. Vallardi, p. 684.

parte più alta e slargata, ove prima era stato un laghetto, in pseudocratere e tutta la grotta divenne Stufa.

Gli altri meati fumanti debbono ritenersi di epoca più recente, giacchè le acque non vi hanno esercitata così profonda azione erosiva, che avrebbe rese assai più ampie le loro bocche coi rispettivi canali.

La scarsezza della precipitazione acquea odierna mi fa ritenere, che il dinamismo del pseudovulcano è sostenuto oggi da infiltrazione di acque per meati diversi dalle bocche fumanti.

Le trasformazioni (2, 2) quadratiche e cubiche di spazio

Memoria del Dott. G. MARLETTA

Con due mie note precedenti, che dovrò citare nel corso del presente lavoro, detti principio allo studio delle trasformazioni (2,2) fra piani. In esse trattai della trasformazione quadratica e delle due specie di trasformazioni cubiche, assegnando, inoltre, alcuni teoremi e alcune formole relative a trasformazioni d'ordine e generi qualunque.

La presente nota inizia lo studio analogo per gli spazi ordinari, studiando la trasformazione quadratica e le trasformazioni cubiche (2,2), ove per trasformazione *cubica* s'intenda ogni trasformazione che ad una retta generica di uno spazio, faccia corrispondere una cubica nell'altro, e ad una retta di questo una cubica di quello. È da notare che mentre per le trasformazioni piane mi son servito quasi sempre di certe superficie dello spazio da quattro dimensioni, le presenti, invece, sono studiate direttamente senza uscire dagli spazi ordinarî dati, tranne quando la semplicità e l'eleganza del ragionamento me l'abbia consigliato.

Dei sei capitoli in cui questo lavoro è diviso, il primo è quello che tratta la trasformazione quadratica. In esso assegnati i caratteri generali, si dà una costruzione della trasformazione senza uscire dai due spazi dati.

Inoltre si assegna una costruzione assai elegante della più generale trasformazione quadratica involutoria, mercè però l'intervento della forma quadratica dello spazio da quattro dimen-

sioni. Anzi si assegna pure l'analoga costruzione nel caso della più generale trasformazione quadratica involutoria fra piani.

Nel secondo capitolo si fà una classificazione di tutte le trasformazioni cubiche, dividendoli nei tre tipi seguenti:

1. Trasformazioni per cui sono ellittiche le cubiche corrispondenti alle rette. — 2. Trasformazioni per cui sono piane e razionali le cubiche corrispondenti alle rette. — 3. Trasformazioni per cui sono sghembe le cubiche corrispondenti alle rette.

Quest'ultimo tipo alla sua volta si suddivide in due sottotipi:

a) Esiste in ciascuno spazio un complesso lineare speciale di rette ciascuna delle quali contiene una coppia di punti congiunti. — *b*) Esiste in ciascuno spazio una congruenza lineare di rette autocongiunte.

Le trasformazioni dei primi due tipi si posson tutte costruire con opportune proiezioni di una forma cubica dello spazio da quattro dimensioni. Numerosi ed importanti sono i casi particolari che il 1° tipo presenta, ma per amor di brevità non si insiste su di essi. Le trasformazioni del 3° tipo si possono costruire tutte con proiezioni opportune di varietà a tre dimensioni dello spazio a cinque dimensioni.

I.

La trasformazione quadratica.

1. Siano S e S' due spazi ordinari riferiti algebricamente in modo che ad un punto del primo corrispondano due punti del secondo, mentre ad un punto di questo corrispondano due punti di quello. Se un punto di S descrive un piano φ i suoi omologhi generino una quadrica φ'. Allora ad una retta qualunque s' di S' corrisponde in S una curva s, che è una conica, giacchè un piano arbitrario φ l' incontra in tanti punti quanti sono quelli comuni alla retta s' ed alla quadrica φ'. Di coniche come s, ne abbiamo una quadrupla infinità.

Sia r una retta generica di un piano anch' esso generico φ di S: la curva r' corrispondente di r sarà situata sulla quadrica φ'. Ad una retta qualunque s' di questa, corrisponde in S una coppia di rette (incidenti) s_1, s_2, delle quali una sola, s_1 p. es., giace nel piano φ. La curva r' sarà incontrata da s' in tanti punti quanti sono quelli comuni ad r e ad s_1, cioè la r' è secata in un sol punto da ciascuna retta di φ'. Ne segue che r' è anch' essa una conica, e dunque in ogni caso possiamo concludere che « *ad una retta di* S — *di* S' — *corrisponde in* S' — *in* S — *una conica*.

« *Ad un piano arbitrario* ψ' *di* S', *corrisponde una quadrica* ψ *di* S ».

Per i caratteri fin ora detti, noi chiameremo *quadratica* la trasformazione in esame; trasformazione che indicheremo con la lettera T.

2. Diremo che due punti di S — di S' — sono *congiunti*, quando corrispondono ad uno stesso punto di S' — di S —. In ciascuno dei due spazi ogni punto è congiunto a due punti (generalmente distinti). La trasformazione T determina dunque in ciascuno degli spazi S e S', una nuova trasformazione (2, 2) involutoria, che chiameremo *trasformazione congiunta* alla data. È facile dimostrare che « *le trasformazioni congiunte a* T *in* S *e in* S', *sono anch' esse quadratiche, e che quindi in qualunque trasformazione* (2, 2) *quadratica, non esistono elementi fondamentali* ».

3. Chiameremo *superficie limite* di S — di S' —, e la indicheremo con λ — con μ' —, il luogo dei punti i cui corrispondenti in S' — in S —, sono infinitamente vicini. Il luogo di questi sarà chiamato *superficie doppia*, e sarà indicato con λ' — con μ —, quale corrispondente di λ — di μ' — .

« *Le superficie limiti e le superficie doppie di qualunque trasformazione quadratica, sono quadriche* ».

Le quadriche λ, λ' — μ, μ' — si corrispondono proiettivamente, cioè ad un punto dell' una corrisponde un punto dell' altra, in modo che se il primo descrive una retta, anche il secondo descriverà una retta.

« *Le coniche corrispondenti alle rette di* S — *di* S' — *sono bitangenti la superficie limite* μ' — λ — » (*).

« *Le quadriche che corrispondono ai piani di* S — *di* S' —, *toccano* μ' — λ — *lungo una conica* ». (*)

A due piani generici di S — di S' — corrispondono due quadriche di S' — di S — che si toccano in due punti di μ' — di λ —. Ne segue che esse si secano lungo due coniche, una delle quali è la corrispondente della retta comune ai due piani di S— di S' —.

4. Sopra una retta generica di S — di S' — non esiste alcuna coppia di punti congiunti: *tutte queste coppie sono sparse nelle rette di una stella.*

A tal fine cominciamo col dimostrare che le rette contenenti (almeno) una coppia di punti congiunti non possono formare un complesso. Infatti se ciò fosse, in un piano generico φ esisterebbe una semplice infinità di coppie di punti congiunti, formanti una curva comune a φ ed alla sua quadrica (n° 2) congiunta φ_1. Ma φ e φ_1 non hanno in comune alcun punto fuori dalla conica $\varphi\mu$ posta sulla superficie doppia μ, dunque è assurdo ammettere l' esistenza del detto complesso. Ne segue che le rette aventi (almeno) una coppia di punti congiunti, costituiscono una congruenza, e che quindi, intanto, esse contengono infinite di tali coppie: Si deduce ora facilmente, che « *le coppie di punti congiunti di* S — *di* S' — *son tutte poste in rette uscenti da un certo punto*, D — D' — *doppio per la trasformazione* T ».

Le rette della stella (D) sono perciò autocongiunte, e quindi a ciascuna di esse corrisponde in S' in forza di T, una retta di

(*) DE PAOLIS — *Le trasformazioni doppie dello spazio.*—Mem. Acc. Lincei 1885 — 6 I.

(D') contata due volte. Da questa osservazione deduciamo che « *fra le due stelle* (D), (D') *intercede un' omografia* Δ, *ove sono corrispondenti rette o piani, che si corrispondono in* T ».

5. Ad una retta della stella (D) corrisponde in forza di T una retta di (D') contata due volte; e viceversa. Ad un piano di (D) corrisponde un piano di (D') contato due volte; e viceversa. Cioè fra un piano di (D) e il suo corrispondente in forza dell' omografia Δ, la T determina (*) una trasformazione quadratica (2,2). Da questa osservazione seguono moltissime proprietà della data trasformazione T, delle quali enuncieremo le seguenti:

« *Nello spazio* S — S' — *la superficie limite e la superficie doppia si toccano lungo una conica, e il cono circoscritto ad entrambe lungo questa, ha il vertice nel punto doppio* D — D' — ». (**) « *Ad una tangente della superficie limite* λ — μ' — *corrispondono due tangenti di* μ' — *di* λ — *secantisi in un punto della superficie doppia* λ' — μ — ». « *Ad un piano tangente di* λ — *di* μ' — *corrisponde un cono quadrico circoscritto a* μ' — *a* λ — , *e avente il vertice sulla superficie doppia* λ' — μ — ».

6. Da quanto abbiamo detto segue « *una costruzione della più generale trasformazione quadratica* (2,2) *fra due spazi ordinari* (*distinti o sovrapposti*) S *e* S' ».

Si rammenti (***) in primo luogo che una trasformazione quadratica (2,2) (T) fra due piani π e π', è perfettamente determinata assegnando una proiettività δ fra due fasci $(D\pi)$ e $(D'\pi')$, un' altra ω fra le tangenti di una certa conica (λ) di π, e quelle

(*) Tutte le proprietà sin ora ottenute circa la trasformazione T, si possono eziandio ottenere con ragionamenti analoghi a quelli che faremo per la trasformazione cubica del primo tipo.

(**) Marletta — *La trasformazione quadratica* (2,2) *fra piani* » n. 10 — Rend. d. Circolo Matemat. di Palermo, t. XVII. 1903.

(***) Marletta — l. c. n. 18.

di un' altra conica (μ') di π', in maniera però che tanto δ che ω trasformino, nello stesso modo, le due tangenti di (λ) uscenti da D, nelle due tangenti di (μ') uscenti da D'. Osserviamo inoltre, che per determinare ω è sufficiente assegnare una sola coppia di tangenti corrispondenti, giacchè fra le due coppie uscenti da D e da D', la corrispondenza è fissata, una volta che si è assegnata δ. Siano t e t' le due tangenti corrispondenti di (λ) e (μ') di cui si parla: al punto M di contatto di t corrisponde, contato due volte, il punto M' di t' posto sulla retta δDM. Ora è da notare che se si cambia t' con l' altra tangente che da M' si può condurre a (μ'), la trasformazione (T) non viene a mutare, giacchè in sostanza non si fa altro che sostituire la proiettività ω con l' altra ω_1 che deve (*) intercedere fra le tangenti di (λ) e quelle di (μ') in forza della stessa (T).

7. Ed ora ecco la promessa costruzione della trasformazione T fra due spazi ordinari S e S'.

Si stabilisca una corrispondenza omografica Δ fra due stelle (D) e (D') rispettivamente di S e S'. Scelta una quadrica qualunque λ di S, non passante per D, si iscriva un' altra quadrica μ' nel cono quadrico di (D') che corrisponde, in forza di Δ, al cono circoscritto dal punto D a λ. Inoltre si fissi un punto qualunque M di λ, e un altro punto a piacere M' di S', posto sulla retta ΔDM. Con ciò è perfettamente determinata una certa trasformazione quadratica (2,2) (T) fra due piani qualunque omologhi in forza di Δ, e passanti rispettivamente per le rette DM e $D'M'$. Infatti in due piani π e π' siffatti sono assegnate le coniche limiti (λ) e (μ'), quali sezioni delle quadriche λ e μ. Sono assegnate, inoltre, le proiettività δ e ω, la prima in forza dell'omografia Δ la seconda perchè si conosce una coppia di tangenti corrispondenti (oltre di quelle uscenti da D e D'), nella tangente a (λ) in M, e in una, scelta a piacere, delle due tangenti

(*) MARLETTA — l. c., n. 9.

che da M' si posson condurre a (μ'). Questa scelta, poi, non fa mutare la corrispondenza (2,2) (T), per quanto si disse in fine del n° precedente.

Che la trasformazione T così costruita fra i due spazi S e S' sia quadratica, è facile vedere. Si noti finalmente che la T non varia, se si sostituisce M con un altro punto qualunque N di λ, purchè M' si sostituisca con N', se questo è l'omologo (contato due volte) di N in T. Infatti basta osservare che in due piani corrispondenti in T, passanti rispettivamente per le rette DN, $D'N'$, la trasformazione (2,2) determinata dalla T, e l'altra ottenuta con un procedimento analogo a quello ora detto, coincidono, giacchè sono determinate entrambe dai medesimi dati, con le medesime proiettività.

8. Siano λ' e μ' due quadriche quali si vogliano di uno spazio ordinario S', tangenti lungo una conica: il polo del piano di questa rispetto ad entrambe si chiami D'. Indi si stabilisca un'omografia Δ fra le stelle (D) e (D'), ove D è un punto qualunque di un altro spazio S, e nel cono quadrico di (D) che corrisponde in forza di Δ^{-1} a quello circoscritto da D' a λ' e μ', si iscriva una quadrica λ. Infine si scelga un punto generico M di λ, e uno M', dei due punti in cui λ' è secata dalla retta ΔDM. Procedendo come nel n° precedente si ottiene una trasformazione quadratica (2,2) fra S e S', in cui μ' è evidentemente superficie limite e λ' superficie doppia, giacchè questa non è altro che la quadrica passante per M' e tangente μ' lungo la medesima conica secondo la quale la tocca λ'. Ne segue che
« *date due quadriche quali si vogliano, tangenti lungo una conica, e detto* D' *il loro bipolo, i coni quadrici circoscritti ad una di esse dai punti dell'altra, son tali che due qualunque si secano in una coppia di coniche, una delle quali giace in un piano per* D', *e tutti quelli i cui vertici sono punti di una stessa conica, hanno in comune due punti allineati con* D' ».

Questo teorema di geometria proiettiva elementare, si de-

duce dalle proprietà dette sopra circa la trasformazione quadratica (2,2) studiata. Esiste un teorema analogo nel piano, circa due coniche bitangenti. Del resto di questi due teoremi si posson dare dimostrazioni dirette.

9. Servendoci del teorema qui sopra enunciato, possiamo dare un' altra costruzione della più generale trasformazione quadratica (2,2) fra spazi ordinari S, S'.

Si dia in S una quadrica λ riferita proiettivamente ad una altra λ' di S'; poscia sia μ' una quadrica tangente λ' lungo una conica. Dato un punto P di S, il suo piano polare rispetto a λ seca questa stessa lungo una conica, alla quale corrisponde in λ' un' altra conica. Tutti i coni quadrici circoscritti a μ' dai punti di questa, si secano (n° 8) in due punti allineati col bipolo D' di λ', μ': assumeremo questi due punti come corrispondenti di P. Per quanto si disse nel n° precedente è chiaro che in tal modo si viene a costruire una trasformazione quadratica (2,2) fra i due spazi S e S'. Si può dare una costruzione analoga per la trasformazione quadratica (2,2) fra piani.

10. « *Qualsivoglia trasformazione quadratica (2,2) fra spazi ordinari, si può sempre costruire, a meno di omografie, mediante proiezioni dei punti di una quadrica dello spazio da quattro dimensioni* » (*).

Se i due centri di proiezione, sono reciproci rispetto alla quadrica di S_4, i due punti congiunti di un punto qualunque di S — di S' — coincidono, e le due trasformazioni congiunte si riducono a due omologie armoniche. Da questo teorema segue che « *una trasformazione quadratica (2,2) fra due spazi ordinari è perfettamente determinata (a meno di omografie), quando sian noti i due punti doppi, e quattordici coppie di punti corrispondenti*

(*) MARLETTA — l. c., n. 19.

generici, (tali che proiettati da quelli dian rette omologhe in due stelle omografiche) ».

11. Sia t una conica, e $abcd$ un quadrilatero ad essa circoscritto: se p è una retta generica del piano di t, è chiaro che mediante t e assumendo come centri di proiezione i vertici $Q \equiv ad$ e $Q' \equiv bc$, si può stabilire su di essa una corrispondenza (2, 2). Inoltre osserviamo che per note proposizioni, la condizione necessaria e sufficiente affinchè questa corrispondenza sia involutoria, è che sia $p \equiv ab.cd$.

Siano ora Q e Q' due punti qualunque di uno spazio ordinario S, e θ una quadrica di questo non passante per essi. I due coni circoscritti a θ da Q e Q', si toccano nei due punti in cui θ è secata dalla polare della retta QQ', e quindi essi si secano in due coniche; indichiamo con π il piano di una di esse. Mediante proiezioni dei punti di θ da Q e Q' su π, si può stabilire in questo piano una trasformazione quadratica (2, 2), la quale è involutoria per quanto poco sopra si è osservato. Viceversa è chiaro che a meno di omografie, ogni trasformazione quadratica (2, 2) involutoria piana, si può ottenere come ora si è detto.

Con procedimento analogo possiamo dare, a meno di omografie, *una costruzione della più generale trasformazione quadratica (2,2) involutoria dello spazio ordinario.* Nello spazio da quattro dimensioni si assuma una forma quadratica θ, e due punti Q, Q' fuori di essa. I due coni a tre dimensioni circoscritti da questi punti a θ, si toccano lungo la conica secondo cui θ è secata dal piano polare della retta QQ'. Ne segue che essi si secano in una superficie del quarto ordine, spezzata in due quadriche. Se ora si sceglie lo spazio di una a piacere di queste quadriche, come quello in cui si vuole stabilire una trasformazione quadratica (2,2), mediante proiezioni dei punti di θ da Q e Q', si ottiene una trasformazione involutoria.

È poi evidente che viceversa ogni trasformazione quadratica

(2,2) involutoria dello spazio ordinario, si può, a meno di omografie, ottenere nel modo ora detto.

II.

Classificazione delle trasformazioni cubiche.

1. Chiameremo *trasformazione cubica* (2, 2) fra due spazi ordinari S e S', ogni corrispondenza algebrica (2,2) stabilita fra questi spazi, in modo che ad un piano generico di S — e di S' — corrisponda una superficie cubica di S' — di S —. Segue intanto immediatamente che ad una retta generica di S — di S' — corrisponde in S' — in S — una curva del terzo ordine.

2. Sia T la trasformazione cubica in esame, e facciamo la ipotesi che sia ellittica la cubica r' corrispondente ad una retta generica r di S.

Le cubiche r' sono in numero quattro volte infinito, e in un piano generico φ' di S' non ve ne può essere una semplice infinità, giacchè se così fosse la superficie cubica φ corrispondente di φ', avrebbe infinite rette doppie, e quindi si spezzerebbe in due piani φ_1 e φ_2, uno dei quali, p. es. φ_1, da contare due volte. Fra i piani φ' e φ_1 non può intercedere una corrispondenza (2,1) in forza di T, giacchè in tal caso ad una retta generica di S' corrisponderebbe in S una curva del sesto ordine, spezzata in due cubiche (razionali) poste una in φ_1, e l'altra in φ_2: visto che fra i piani φ_2 e φ' intercederebbe mediante T una corrispondenza binnivoca.

Se poi la data trasformazione determinasse fra i piani φ' e φ una corrispondenza (2,2), allora entrambi questi piani sarebbero autocongiunti, e ciò è assurdo essendo φ' un piano generico di S'. Concludiamo dunque che in un piano siffatto non può esistere una semplice infinità di cubiche r'. È poi facile comprendere che non può esistere alcun piano di S' contenente ∞^3

curve r', giacchè non esiste alcuna superficie (di S) avente un tal numero di rette (doppie). Perciò possiamo concludere che in S' esiste una doppia infinità di piani π', ciascuno dei quali possiede ∞^2 cubiche r'.

Ad un piano π' corrisponde in S una superficie cubica spezzata in due piani π e δ, uno dei quali π è da contare due volte. In forza di T fra i piani π e π' non può intercedere una corrispondenza (1,2), giacchè in tal caso ad una retta generica di S' corrisponderebbe in S una curva d'ordine superiore al terzo; ma invece resterà determinata una corrispondenza (2,2). Per una retta generica s' di S' passa un piano π' (almeno), e per quanto ora abbiamo detto la cubica s di S ad s' corrispondente, sarà posta in un certo piano π, e sarà ellittica, giacchè è noto (*) che se fra due piani π e π', intercede una trasformazione (2,2), e ad una retta generica r di π corrisponde in π' una cubica ellittica, anche ellittica sarà la cubica s corrispondente ad una retta generica s' di π'. Concludiamo che « *data una trasformazione cubica (2, 2) fra spazi ordinari, se sono ellittiche le cubiche di uno spazio corrispondenti alle rette dell'altro, pure ellittiche saranno le cubiche di questo che corrispondono alle rette di quello* ».

3. Con analoghi ragionamenti si dimostra che « *data una trasformazione cubica (2,2) fra spazi ordinari, se sono piane e razionali le cubiche di uno spazio corrispondenti alle rette dell'altro, pure piane e razionali saranno le cubiche di questo che corrispondono alle rette di quello* ».

(*) MARLETTA — « *Le trasformazioni cubiche (2, 2) fra piani* » (1, 3) — Rend. d. Circolo Matem. di Palermo, t XVII, 1903.

In questa mia nota citata, si ponga:

	Errata	corrige
pag. 10, riga 2^a:	al punto $\omega^{-1}\, b'_1$, b	ad un punto determinato della $\omega^{-1}\, b'_1$.
» » 8^a:	» $\omega^{-1}\, a'_1$, a	» $\omega^{-1}\, a'_1$.

4. Dai due teoremi precedenti si deduce immediatamente che

« *data una trasformazione cubica (2,2) fra spazi ordinari, se sono sghembe le cubiche di uno spazio corrispondenti alle rette dell'altro, pure sghembe saranno le cubiche di questo che corrispondono alle rette di quello* ».

5. Siccome in seguito faremo vedere che esistono effettivamente trasformazioni per le quali si verificano le ipotesi dei tre teoremi precedenti, così possiamo ora *classificare* le trasformazioni cubiche (2,2) fra spazi ordinari, formandone *tre tipi;* e precisamente metteremo nel *I° tipo* quelle trasformazioni per le quali sono ellittiche le cubiche corrispondenti alle rette; nel *II° tipo* quelle per le quali sono piane e razionali le cubiche corrispondenti alle rette. E, infine, porremo nel *III° tipo* le trasformazioni per le quali alle rette corrispondono cubiche sghembe.

III.

La trasformazione cubica del primo tipo.

1. Sia T una trasformazione cubica (2, 2) fra due spazi S e S', tale che sian cubiche ellittiche le curve di S — di S' — corrispondenti alle rette di S' — di S — (II, 2). Ai piani di S — di S' — corrispondono in S' — in S — superficie del terzo ordine a sezioni piane ellittiche.

Si vide (II, 2) che in S — in S' — esiste una doppia infinità di piani π — π' — a ciascuno dei quali corrisponde in S' — in S — un piano π' — π — contato due volte, (insieme con un altro piano), e che fra due piani π e π' corrispondenti, la data trasformazione T, determina una trasformazione cubica (2,2) di primo genere.

2. Ora osserviamo che i piani π — π' — formano una stella. Infatti per una retta generica di S, p. es., passa quel solo piano π, che corrisponde al piano π' di S' contenente la cubica che corrisponde alla retta.

Dunque concludiamo che
« *in* S *e in* S′ *esistono due stelle tali che ad un piano qualunque di una di esse, corrisponde nell' altro spazio un piano dell' altra stella, contato due volte, (insieme con un piano fisso). Fra due piani siffatti la trasformazione* T *determina una trasformazione* (2,2) *cubica di primo genere, i cui punti fondamentali sono rispettivamente i centri* D *e* D′ *delle due stelle, punti che sono dunque pure fondamentali semplici per la trasformazione* T. *Fra le due stelle* (D) *e* (D′) *intercede un'omografia dove sono omologhi piani o rette corrispondentisi in* T ».

Questa omografia si indicherà con Δ. Al punto D — D' — corrisponde in S' — in S — il punto D' — D — insieme con un certo piano fondamentale δ' — δ —.

3. È poi facile dimostrare che
« *qualunque trasformazione* (2,2) *cubica del primo tipo, fra spazi ordinari, si può sempre costruire, a meno di omografie, mediante proiezioni dei punti di una forma cubica dello spazio da quattro dimensioni, da due punti di essa* ».

4. È noto (*) che per un punto qualunque della forma cubica di S_4 passano sei rette di essa, le quali appartengono ad uno stesso cono quadrico. Ne segue che
« *nello spazio* S — S′ — *esistono sei punti fondamentali (semplici), oltre del punto* D — D′ —, *ed essi son posti in una stessa conica* ».

Per distinguerli dal punto D — D' —, chiameremo questo *punto fondamentale di* 1ª *classe*, e gli aitri saranno chiamati *punti fondamentali di* 2ª *classe*.

(*) Segre — *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni e...* Mem. d. R. Acc. di Torino, serie 2ª, tomo XXXIX.

5. Si definiscano le superficie limiti e le superficie doppie, analogamente a come si fece (I, 3) per la trasformazione quadratica. Osservando che la superficie limite λ di S — μ' di S' — è il contorno apparente della forma cubica da un suo punto, si deduce senz'altro che

« *la superficie limite λ di S — μ' di S — è del quarto ordine, ed è dotata di sei punti doppi nei sei punti fondamentali di 2ª classe* ».

Essa dunque ammette un piano che la tocca lungo la conica dei detti sei punti fondamentali. Viceversa, ogni superficie del quarto ordine con un piano tangente lungo una conica, si può considerare come superficie limite rispetto ad una trasformazione (2,2) cubica di primo genere, giacchè essa si può (*) ottenere come contorno apparente di una forma cubica di S_4 rispetto ad un suo punto.

« *La superficie doppia λ' — μ — è del sesto ordine, ed ha come doppi tutti i sette punti fondamentali* ».

Si è detto (III, 2) che in due piani delle stelle (D) e (D') omologhi in Δ, la T determina una trasformazione (2,2). Questa ha per curve limiti e per curve doppie le sezioni ottenute nella superficie λ, μ' e λ' μ rispettivamente. Ma è noto (**) che la curva limite e la curva doppia di una siffatta trasformazione piana, si toccano in tutti i punti comuni, e che le tangenti in questi concorrono nel punto fondamentale, dunque:

« *Nello spazio S — S' — la superficie limite e la superficie doppia si toccano lungo una curva del dodicesimo ordine, e i piani tangenti comuni nei punti di questa curva, concorrono tutti nel punto fondamentale* D — D' — ».

Del resto ciò segue dall'osservare che il cono in tal modo ottenuto, è la traccia in S — in S' — dell'altro di seconda specie, circoscritto alla forma cubica dalla retta DD'.

6. Si è detto (III, 2) che al punto D — D' — corrisponde

(*) Segre — « l. c. »

(**) Marletta — « l. c. » (III, 6).

in S' — in S — il punto D' — D — insieme col piano fondamentale δ' — δ —; questo è il luogo delle rette fondamentali (*) dei piani π' — π —. « *A ciascuno degli altri sei punti fondamentali corrisponde una retta uscente da* D′ — *da* D — ».

« *Queste sei rette fondamentali appartengono ad uno stesso cono quadrico, e giacciono nella superficie* λ' — μ — ».

« *Le curve corrispondenti alle rette sono cubiche ellittiche, le quali toccano sei volte la superficie limite. I loro piani passano per il punto fondamentale di 1ª classe* ».

« *Le superficie di* S′ — *di* S — *che corrispondono ai piani di* S — *di* S′ — *toccano la superficie limite* μ' — λ —, *lungo una curva del sest'ordine* », cioè in ogni punto comune.

7. Vogliamo ora dire qualche cosa circa alle trasformazioni congiunte a T. Considereremo quella esistente in S, valendo pure per l'altra di S', tutte quelle proprietà che enuncieremo.

« *Le superficie congiunte ai piani, sono del sesto ordine; hanno quadruplo il punto* D, *e doppi gli altri sei punti fondamentali. Le curve congiunte alle rette, sono sestiche ellittiche, con un punto quadruplo in* D. *Al punto* D *è congiunto un luogo del quart'ordine, composto del piano* δ, *e di una superficie cubica avente come doppio questo medesimo punto* D. *A ciascuno degli altri sei punti fondamentali è congiunta una retta di* (D) *contata due volte* ».

8. Non daremo alcuna costruzione della trasformazione T, senza uscire dai due spazi S e S'. Solo osserveremo che una costruzione siffatta è sempre possibile, ogni qual volta esiste una rappresentazione biunivoca della forma cubica che serve a costruire T, nello spazio ordinario. Essa, in tale ipotesi, sarà condotta in modo perfettamente analogo a quello tenuto per la trasformazione (2, 2) cubica di primo genere fra piani (**), cioè

(*) Marletta « l. c. » (III. 2).

(**) Marletta — « l. c. » (III. 11).

basterà interpetrare convenientemente nella rappresentazione della forma cubica, la funzione di questa circa la costruzione della data trasformazione. Se la detta forma non è la generale, non si ottiene più la trasformazione T generale, ma bensì un caso particolare. (*)

IV.

La trasformazione cubica del secondo tipo.

1. Supponiamo che nella trasformazione cubica T, ad una retta generica di S, e quindi anche di S' (II, 2), corrisponda una cubica piana razionale di S', di S. Una retta generica di S contiene dunque una coppia di punti congiunti: se questi fossero distinti, si avrebbe in S una quadrupla infinità di coppie di punti congiunti; e ciò è assurdo.

Dunque i due punti congiunti posti in una retta generica di S, non sono distinti, ma *coincidenti*. In altri termini possiamo dire che in una retta generica di S esiste un punto *doppio* per la trasformazione.

Il luogo di questi punti doppi è dunque un piano che chiameremo τ. Siccome poi per S' possiamo ripetere le considerazioni fatte per S, così possiamo dire che anche in S' esiste un piano τ' ciascun punto del quale è *doppio* per T.

È chiaro ancora che τ e τ' sono corrispondenti, e che τ' — τ — è il luogo dei punti doppi delle cubiche di S — di S' — corrispondenti alle rette di S' — di S —. Ad un piano generico di S — di S' — corrisponde in S' — in S — una rigata cubica la cui direttrice doppia è nel piano τ' — τ — .

2. Sia s' una retta generica di S', ed s la cubica corrispon-

(*) Dalla memoria citata del Prof. SEGRE, si ricavano tutti i tipi di superficie limiti per trasformazioni (2.2) come quelle che studiamo, giacchè una superficie può assumersi come una tale superficie limite, allora e solamente allora quando è contorno apparente di una forma cubica di S_4 da un punto (semplice) di questa.

dente in S: in un piano generico φ di S non esiste alcuna curva s, giacchè nel caso contrario la superficie φ' avrebbe (almeno) due rette doppie, una delle quali sarebbe la s', e quindi si spezzerebbe in una quadrica φ'_2 e in un piano φ'_1 a questa tangente. Ora ciò è assurdo perchè porterebbe di conseguenza che o la curva di S' corrispondente ad una retta generica di S sia d'ordine superiore al terzo, spezzandosi in una cubica (razionale) di φ'_1 e in un'altra curva di φ'_2, ovvero fra i piani φ e φ'_1 interceda, in forza di T, una corrispondenza (1,2), e ad un punto generico di S, considerato come comune a tre piani non passanti per una stessa retta, corrisponderebbe in S' l'unico punto comune a certi tre piani come φ'_1, e ciò è assurdo. Osserviamo ancora che in un piano generico di S non può esistere un numero di curve s almeno tre volte infinito, per ragioni simili a quelle addotte nel § 2 del capitolo II.

Concludiamo dunque che le curve s sono sparse in una doppia infinità di piani, in ciascuno dei quali esse sono in numero doppiamente infinito. Un piano siffatto l'indicheremo con π. Cose analoghe si dicano circa lo spazio S'.

3. Analogamente a come si fece per la trasformazione cubica del primo tipo, si dimostra che

« *la trasformazione cubica del secondo tipo più generale, si può sempre ottenere, a meno di trasformazioni omografiche, mediante proiezione dei punti di una forma cubica di* S_4 *dotata di piano doppio, scegliendo come centri di proiezione due punti (semplici) della medesima.*

Per amor di brevità non ci dilunghiamo nella ricerca dei rimanenti caratteri proiettivi della trasformazione T; caratteri che, del resto, sono analoghi a quelli della trasformazione studiata nel capitolo precedente.

V.

La trasformazione cubica del terzo tipo e del sottotipo *a)*

1. Consideriamo ora l'ipotesi che ad una retta generica di S — di S' —, corrisponda una cubica sghemba di S' — di S —, in forza della trasformazione T. In una retta generica di S non esiste alcuna coppia di punti congiunti: se ne esiste una, la cubica corrispondente ammette un punto doppio. Si possono evidentemente distinguere due casi: il primo è che una retta (non generica) possa contenere un numero *finito* di coppie di punti congiunti; il secondo è che una retta non possa contenere un numero *finito* di siffatte coppie, cioè che se una retta contiene (almeno) una coppia di punti congiunti, ne ammetta infinite. Siccome in seguito si farà vedere che a queste due ipotesi circa lo spazio S, corrispondono di *conseguenza* ipotesi analoghe per lo spazio S', concludiamo che il *terzo tipo* (II, 5) di trasformazioni cubiche (2,2) fra spazi ordinari, si divide in due *sotto-tipi* *a)* e *b)*. Cominceremo con lo studio del sottotipo *a)*, cioè di quello per cui esistono rette p che contengono un numero *finito* di coppie di punti congiunti.

2. Le rette p di S che posseggono (almeno) una coppia di punti congiunti, formano un certo complesso (p). In un piano generico φ ve ne saranno ∞^1 di tali rette, e le coppie di punti congiunti in esse contenute costituiranno una curva f, la quale corrisponde ad una linea f' *doppia* per la superficie cubica φ' di S', al piano φ corrispondente. Ne segue senz'altro che f' è una retta, e precisamente essa è la direttrice doppia della rigata φ'. Per le ipotesi fatte circa le rette p, la f non può essere una retta, e allora essa non è *autoconqiunta*, se con tal nome intendiamo significare che i due punti congiunti ad uno qualunque di f, giacciono entrambi in f. Infatti se così fosse, alla retta f' corrisponderebbe in S la f contata due volte, e ciò è assurdo.

perchè ad una retta di S' può corrispondere in S o una linea del terz'ordine, o una curva d'ordine inferiore al terzo insieme con una superficie, (ciò nel caso che quella retta di S' passi per un punto fondamentale di 1ª classe (*)). Dunque concludiamo che dei due punti congiunti ad uno generico di f, uno solo giace pure in f. Una retta qualunque r del piano φ, seca f in tanti punti, quanti sono i punti (variabili) comuni alla retta f'' ed alla cubica sghemba r' ad r corrispondente. Ma r' ha f'' per corda, dunque l'ordine di f è al più eguale a due, e non potendo esserne inferiore per una osservazione fatta poco sopra, concludiamo che f è una conica. Su questa conica le coppie di punti congiunti costituiranno un'involuzione quadratica razionale, e le congiungenti p i punti coniugati formeranno un fascio lineare. Concludiamo che « *il complesso (p) è lineare* ». Segue ancora che una qualunque retta p contiene una *sola* coppia di punti congiunti.

3. Sia P un punto generico di S, e P_1, P_2 i suoi due punti congiunti: il fascio di rette p uscenti da P, conterrà le due rette PP_1 e PP_2. Ne segue per le cose dette nel n.° precedente che il piano $PP_1 P_2$ non è *generico*, cioè in un piano generico non esistono terne di punti come $PP_1 P_2$. Sia π un piano che ammetta di tali terne: in esso queste devono essere almeno in numero semplicemente infinito, e sopra una retta generica r di π, deve esistere (almeno) un punto i cui congiunti giacciono entrambi in π. Se ne deduce che r contiene (almeno) una coppia di punti congiunti, giacchè π è sostegno di *tutti* i fasci del complesso *(p)* aventi i centri negl'infiniti punti di π, i cui congiunti giacciono entrambi in questo piano medesimo. E allora i piani come π non possono essere in numero doppiamente infinito, infatti in tal caso siccome per una retta generica di S ne passerebbe (almeno) uno, si dedurrebbe che una retta gene-

(*) De Paolis — l. c. ».

rica di S conterrebbe una coppia di punti congiunti, e ciò è assurdo. Dunque concludiamo che i piani π sono in numero semplicemente infinito, e che ciascuno di essi è *autocongiunto.*

Di piani π per un punto generico P di S ne passa dunque uno solo, precisamente il piano $PP_1 P_2$: dunque essi formano un fascio di asse d. Ne segue che « *il complesso lineare* (p) *è speciale, e il suo asse è* d ». Ad un piano π corrisponde in S' una superficie cubica spezzata in due piani π' e δ', il primo dei quali è da contare due volte, ed è anch'esso autoconginnto.

Dunque anche in S' si ha un fascio (d') di piani π' autocongiunti. Fra due piani π e π' la data trasformazione T determina un'altra trasformazione (2,2) che è anch' essa cubica e di genere nullo, visto che son cubiche razionali le curve di π' corrispondenti alle rette di π (*). Ne segue ancora che « *in* S' *le coppie di punti congiunti sono distribuite nelle rette* p' *del complesso lineare speciale di asse* d' », osservazione che giustifica la divisione in due sottotipi data alla fine del n. 1 del presente capitolo. Chiameremo δ l'omografia, che la trasformazione T determina fra i due fasci (d) e (d'). È chiaro, infine, che ciascuna delle due rette d e d' è autocongiunta.

4. Immaginiamo che gli spazi S e S' siano immersi nello spazio S_5 da cinque dimensioni: allora possiamo sempre supporre, a meno di omografie, che la retta SS' sia secata in uno stesso punto da due piani dei fasci (d) e (d') omologhi in δ. Indi scegliamo due rette (sghembe) q e q' generiche dello spazio ordinario dd'.

Un iperpiano Δ passante per dd' sechi il fascio (d) nel piano π, e quindi (d') in $\pi' \equiv \delta\pi$: proiettando da q e da q' i punti di π e π' rispettivamente, il luogo del punto comune a due piani proiettanti due punti omologhi, è (**) una superficie del set-

(*) MARLETTA — l. c. (I, 3).

(**) MARLETTA — l. c. (I, 1).

timo ordine, con le rette q e q' doppie, e tale che un piano generico condotto per una di queste, incontra ancora la superficie in due punti. Osserviamo però che di questa superficie fa parte una rigata del quart'ordine, avente le rette q e q' per direttrici doppie, e ciò per il fatto che ad un punto qualunque di d corrispondono due punti di d', e viceversa. La parte rimanente Ω è dunque una superficie cubica, la quale al variare dell'iperpiano Δ, genera una varietà a tre dimensioni Γ, anch'essa del terz'ordine. Di questa non fanno parte le q, q', ma ciascuna di esse l'incontra in un sol punto Q, Q', giacchè un piano per q o per q' deve secare ulteriormente la varietà Γ in soli due punti.

Viceversa, sian dati nello spazio S_5, una varietà cubica Γ a tre dimensioni, due rette (sghembe) generiche q e q' ciascuna incidente in un punto Γ, e due spazi ordinari S e S' aventi in comune una retta solamente. Chiamando omologhi due punti uno di S e uno di S', ogni qual volta sian proiezioni da q e da q' di uno stesso punto di Γ, si viene a stabilire fra i detti spazi, una corrispondenza algebrica (2,2), che indicheremo con T. Se r è una retta generica di S, lo spazio ordinario qr seca Γ in una cubica sghemba, la quale è proiettata da q' sopra S', in un'altra cubica sghemba, e ciò perchè lo spazio (generico) qr non incontra la retta q'. Se invece r si appoggia alla retta $d \equiv qq'. S$, la cubica r' è piana e razionale, e quindi segue che ciascuna retta di S incidente d, possiede una coppia di punti congiunti. Concludiamo dunque che

« *la più generale trasformazione cubica del terzo tipo e del sottotipo a), si può sempre ottenere, a meno di trasformazioni omografiche, mediante proiezione dei punti di una varietà cubica a tre dimensioni di* S_5, *da due rette di questo spazio, incidenti in un punto la detta varietà* ».

5. Non insisteremo ancora nella ricerca delle proprietà proiettive della trasformazione T, giacchè ciò è cosa facile a farsi studiando sulla varietà Γ. Si trova, p. es., che « *le superficie li-*

miti sono coni quadrici » : che esistono punti fondamentali e rette fondamentali ; ecc. Solamente osserveremo che se V è un cono, esiste in S un punto V_1 — in S' un punto V'_1 —, tale che ogni retta di S — di S' — passante per esso, ha per corrispondente in S' — in S — un luogo del terz'ordine composto di tre rette uscenti dal punto V'_1 — V_1, una delle quali è la $V'_1 F'$ — $V_1 K$ —, se F' e K sono i due punti fondamentali di 1ª classe, in S' e in S rispettivamente, per la trasformazione T. Viceversa se T gode di questa proprietà, la varietà V mercè la quale essa può essere costruita, è un cono. Da questa osservazione discende subito una elegante costruzione della trasformazione cubica del 3° tipo e del sottotipo a), senza uscire dai due spazi S e S', nell'ipotesi però che la detta trasformazione si possa ottenere mediante proiezione dei punti di un cono cubico a tre dimensioni di S_5.

Si assegni un fascio (d) di piani in S, ed un altro (d') in S'; poi si stabilisca un'omografia δ fra i piani di (d) e quelli di (d'); sia ancora V_1 un punto qualunque di S non posto sulla retta d, e V'_1 un punto di S' per cui non passi d'. E ora fra due piani π e $\pi' \equiv \delta\pi$ di (d) e di (d'), si stabilisca una trasformazione (2.2) τ cubica e di genere nullo, in modo che sia $d \equiv KF_1$ e $d' \equiv F'K'_1$, dove K ed F' sono due punti fondamentali per τ e non corrispondenti, e F_1 e K'_1 sono i punti congiunti alle due rette fondamentali corrispondenti ai punti F' e K rispettivamente (*). Ciò a meno di omografie, può farsi sempre. Infine si chiamino corrispondenti due punti P e P', uno di S e uno di S', ogni qualvolta si abbia $P'd' \equiv \delta\, Pd$ e $V'_1 P'.\pi' \equiv \tau\, V_1 P.\pi$. In tal modo si viene a costruire una trasformazione (2, 2) T.

(*) Marletta — « l. c. » II. — Che le due rette KF_1 e $F'K'_1$ sono autoconiugate e corrispondenti in τ, si dimostra facilmente osservando che alla KF_1, p. es., corrisponde in π' la retta fondamentale k' insieme con una conica bitangente la curva limite g' dotata di punto doppio in F', e passante per K'_1. Questa conica dunque si deve necessariamente spezzare nella retta $F'K'_1$ contata due volte. Analogamente dicasi per le rette HG_1 e $G'H'_1$ dove G_1 e H'_1 sono i punti congiunti alle rette fondamentali g e h' rispettivamente.

tale che ad una retta generica t di S corrisponde in S' una cubica sghemba t', infatti t' è secata in due punti variabili da un piano qualunque del fascio (d'), ed ha in comune con l'asse d' il (solo) punto F', punto che è fondamentale in ogni trasformazione (2, 2) che intercede fra due piani di (d) e (d') omologhi nell'omografia δ. È chiaro, poi, che T è del sottotipo *a*).

VI.

La trasformazione cubica del terzo tipo e del sottotipo *b*)

1. Vogliamo ora studiare la più generale trasformazione cubica T, del *terzo tipo* e (V, 1) del *sottotipo b*), cioè quella trasformazione (2,2) per cui son cubiche sghembe le curve corrispondenti alle rette, e le coppie di punti congiunti di S sono sparse nelle rette p di una congruenza (p). Nel presente ordine di idee, possono farsi due ipotesi: la prima è che ciascuna retta p sia tale che ad essa appartengano entrambi i due punti congiunti di un suo punto qualunque; la seconda ipotesi è che dei due punti congiunti ad uno generico di una qualsivoglia retta p, uno solo appartenga a questa stessa retta. In fine di questo capitolo si dimostrerà che la seconda ipotesi è da escludere, e quindi possiamo dire fin da ora, che il sottotipo *b*) non si divide alla sua volta. Facciamo dunque lo studio della trasformazione T, ammettendo la prima ipotesi, ossia, come diremo nell'ipotesi che ciascuna retta p sia *autocongiunta*.

2. Una retta generica r di S non contiene alcuna coppia di punti congiunti, e queste coppie sono sparse nelle rette p di una congruenza (p) *del 1° ordine*. Se questa congruenza fosse, poi, di classe zero, sarebbe costituita dalle rette di una stella; e allora il piano π passante per il centro di questa, e per una retta generica r di S, avrebbe per corrispondente in S' una su-

perficie cubica contenente (almeno) ∞^1 rette doppie, e quindi formata da due piani, uno dei quali sarebbe da contare due volte. Ne seguirebbe che la curva r', ad r corrispondente, non sarebbe una cubica *sghemba*. Se inoltre ora osserviamo che una superficie cubica non degenere come quella che corrisponde ad un piano generico di S, non può contenere più di una retta doppia, concludiamo che

« *la classe della congruenza (p) è uno, e che le superficie cubiche di S' corrispondenti ai piani di S sono rigate* ».

3. Ad una retta qualunque p della congruenza *lineare* (p), corrisponde in S' una cubica degenere, spezzata in due rette una p' delle quali è da contare due volte; e siccome p è autocongiunta, pure p' sarà autocongiunta. Si conclude che

« *in S' le coppie di punti congiunti sono sparse nelle rette autocongiunte* p', *di una congruenza lineare* (p'). *Ai piani di S', inoltre, corrispondono in S rigate* (*cubiche*) ».

4. Siano d e h le due direttrici della congruenza lineare (p); e d' e h' quelle di (p'). Ad un piano qualunque π per d, corrisponde in S' un piano π' contato due volte, insieme con un altro piano (fondamentale). Il piano π' passa per una delle due direttrici d' e h': supponiamo che passi per d'. Fra i piani dei due fasci (d) e (d') la trasformazione T, determina dunque un'omografia δ, essendo omologhi in questa due piani corrispondenti in T, come π e π'. Fra i due piani π e $\pi' \equiv \delta\pi$, T determina una trasformazione (2,2), che indicheremo con (π, π'); e in questa sono omologhi due punti, se tali sono per T. Analogamente rimane determinata un'altra omografia ω fra i piani dei due fasci (h) e (h'), e una trasformazione (2,2) fra due piani di questi fasci corrispondenti in ω. Se la trasformazione (π, π') è quadratica, ciascun punto delle rette h e h', è *doppio* per la (π, π') (*) e quin-

(*) Marletta — « *La trasf. quadratica...* » l. c. n. 16.

di queste due rette sono *doppie e corrispondenti* per T, e inoltre esse non sono fondamentali per questa medesima trasformazione. Ne segue che ogni trasformazione (τ, τ') fra due piani τ e $\tau' \equiv \omega\, \tau$ dei fasci (h) e (h'), è cubica (di genere nullo); infatti se fosse quadratica ad ogni punto della retta h — h' — dovrebbe corrispondere una retta in S' — in S —, cioè h e h' dovrebbero essere fondamentali, e ciò non è. Viceversa supposta cubica la (τ, τ'), ogni punto delle rette d e d' è fondamentale (di 2^a classe) per T, e quindi la trasformazione (π, π') è quadratica, visto che ad un punto qualunque di d — di d' — corrisponde una retta in S' — in S —. In seguito supporremo precisamente che sia quadratica la trasformazione che intercede fra due piani come π e π'; e supporremo cubica (di genere nullo) ciascuna trasformazione come (τ, τ'). Osserviamo, ancora, che a d — a d' — corrisponde in S' — in S — la retta d' — d —, insieme con un piano fondamentale.

5. Supponiamo che gli spazi S e S' siano immersi nello spazio S_5 da cinque dimensioni, e procediamo similmente a come si fece nel § 4 del capitolo precedente. Nel presente caso un iperpiano generico condotto per lo spazio ordinario qq', seca la varietà Γ lungo una rigata del quarto ordine passante per le rette q e q'. Dunque Γ è costituita da un sistema algebrico σ di piani, semplicemente infinito e razionale, che ha per direttrice la conica ulteriore intersezione di Γ con lo spazio ordinario qq'. Viceversa è chiaro che mediante la varietà Γ si può con proiezioni opportune ottenere fra due spazi ordinari S e S una trasformazione cubica (2,2) del 3° tipo e del sottotipo $b)$.

Non insisteremo sullo studio della trasformazione T, che oramai può facilmente esser fatto mercè la varietà Γ.

6. Dimostriamo ora quanto si asserì nel § 1 del presente capitolo, cioè che le rette p contenenti infinite coppie di punti congiunti, devono essere necessariamente *autoconqiunte*. Infatti

supponiamo che *non* siano autocongiunte: allora l'ordine della congruenza p è eguale a *due*, mentre la classe rimane eguale ad *uno*. Indichiamo con P_1 e P_2 i due punti congiunti di un punto generico P di S: i piani come PP_1P_2 non sono generici, nè possono essere in numero doppiamente infinito, visto che a ciascuno di essi corrisponde in S' una superficie cubica degenere, composta di due piani uno dei quali da contare due volte. Segue che in S esiste un fascio di piani (d), tale che ciascun suo piano contiene infinite rette p, e quindi è autocongiunto. Di conseguenza anche in S' esisterà un fascio (d') di piani autocongiunti. Fra i piani dei fasci (d) e (d') la data trasformazione T determina un'omografia δ. Ma per un noto teorema circa le congruenze di 1ª classe e d'ordine qualunque, in un piano arbitrario del fascio (d) — (d') — le (infinite) rette p — p' — costituiscono due fasci lineari coi centri sulla retta d — d' —, dunque ad un punto generico di S' — di S — dovrebbero corrispondere in S — in S' — due coppie di punti poste in due rette incidenti d — d' — e ciò è assurdo.

Catania, dicembre 1903.

Sulle variazioni diurne del potenziale elettrico dell'atmosfera

Memoria del Prof. A. CAVASINO

Sono scorsi ormai undici anni dacchè il Chiar.^mo Prof. A. Riccò, Direttore del nostro Osservatorio, aveva fatto impiantare gli apparecchi Thomson-Mascart per la registrazione fotografica del potenziale elettrico dell' atmosfera, mettendo a disposizione per queste osservazioni una stanza dell' Osservatorio meteorologico, situata nella parte più alta dell' edifizio, e trasformata opportunamente per la circostanza. Le osservazioni, condotte dallo assistente D.^r C. Del Lungo, durarono circa nove mesi, ma poi fu giocoforza abbandonarle per diverse ragioni, tra cui principalmente la mancanza di un corso perenne di acqua, inconveniente che si ripeteva spesso, specie nella stagione estiva, e il difetto di un buon sistema d' illuminazione.

Debbo alla cortese gentilezza del Direttore, che, con quella liberalità che tanto lo distingue, ha messo a mia disposizione tutti gli apparecchi necessari, se io oggi ho potuto riprendere queste osservazioni allo scopo di completare il lavoro in quella parte che ancora manca, cioè nella stagione autunnale; e nel medesimo tempo farne uno studio per vedere quali relazioni esistono tra l' elettricità dell'aria e gli altri elementi meteorologici, onde poterne dedurre qualche conseguenza circa le cause che determinano questo fenomeno tanto importante e complesso.

Non mi è stato possibile poter utilizzare all'uopo la medesima stanza, dove si fecero le prime osservazioni, per la detta insufficienza dell'acqua, e d'altronde essa camera è stata completamente trasformata ed adibita ad altr'uso, e sarebbe stato quasi impossi-

bile ricondurla al primiero stato; invece il Direttore ha posto a mia disposizione uno stanzino del padiglione della Fotografia Celeste, distante dal primitivo luogo d'osservazione una trentina di metri circa; un locale molto adatto per questo genere di osservazioni, non essendovi edifizi alti vicino, e quindi l'aria vi è perfettamente libera da tutti i lati fino a grande distanza; e sebbene i due punti dell'aria esplorati fossero situati ad altezze ben diverse dal suolo, pure ho constatato subito che le curve ottenute erano quelle caratteristiche dell'elettricità atmosferica.

Gli apparecchi da me adoperati sono quegli stessi ideati da Mascart, e che hanno funzionato egregiamente al Collegio di Francia, ed in Italia al Collegio Romano ed all'Istituto Superiore di Firenze, cioè l'eguagliatore a caduta d'acqua di Sir W. Thomson, l'elettrometro a quadranti Thomson-Mascart, e l'orologio registratore Duboscq.

L'eguagliatore di Thomson è un recipiente metallico appoggiato sopra piedi isolanti e munito in basso di un lungo tubo di efflusso, che traverso una piccola apertura praticata nel muro sporge fuori, a due o tre metri di altezza dal suolo, sgocciolando all'aria libera un liquido conduttore, per esempio, l'acqua ordinaria. Ogni goccia nell'istante in cui si forma, si carica d'una determinata quantità di elettricità, ch'essa trasporta con sè distaccandosi, mentre che una quantità eguale d'elettricità di nome contrario si manifesta nel recipiente unito al tubo che acquista, in condizioni di equilibrio elettrico, il potenziale stesso del punto dell'aria dove l'acqua si rompe in gocce, e per un filo metallico sottilissimo e ben isolato trasmette la carica allo ago dell'elettrometro.

In realtà l'eguaglianza di potenziale non è generalmente ottenuta, esercitandovi una grande influenza la velocità d'efflusso dell'acqua, la forma del getto, la capacità elettrica dei conduttori in comunicazione coll'elettrometro, e le condizioni d'isolamento delle varie parti dell'apparecchio. Ritengo superfluo l'occuparmi di questi particolari dopo lo splendido studio fattone

dai Proff. Roiti e Pasqualini, (1) ond' io rimando senz' altro il lettore a quella memoria. Dirò semplicemente che desiderando anch' io mettermi nelle migliori condizioni per l' osservazione, ed allo scopo di eliminare i sopradetti inconvenienti, ho fatto mettere il rubinetto della conduttura d' acqua sopra l' egualiatore ad un' altezza di circa 50 cm. e regolate le cose in modo che dentro il recipiente cada a goccie tanto di acqua quanto ne sgorga al difuori, cosicchè il livello si mantiene pressochè costante.

Dopo ripetute prove e lunga esperienza posso assicurare nel modo più assoluto che una tal disposizione non porta nessuna variazione nello stato elettrico del collettore, purchè l' acqua vi cada in gocce, e soltanto quando cade a filo continuo sino alla superficie libera si stabilisce la comunicazione col suolo. Oltre la comodità e il vantaggio di non dovere interrompere la curva ogni qualvolta si deve riempire il collettore, si ottiene così un altro effetto utile e non trascurabile, cioè che mantenendosi costante il livello dell'acqua nel collettore, il getto esterno conserva sempre la stessa velocità, mentre varia moltissimo e spesso s'interrompe quando il collettore da pieno è presso a vuotarsi.

Quanto all' isolamento è da notare che gl'isolatori Mascart, i quali sono generalmente usati negli Osservatorii, non prestano buoni servizi se non a condizione che il vetro sia di ottima qualità e che l'acido solforico impiegato per il suo disseccamento sia molto concentrato, anzi conviene spesso rinnovarlo, poichè il vetro è assai igroscopico.

Invece io ho potuto realizzare un miglioramento sensibile nell' isolamento facendo poggiare il collettore sopra cilindri di zolfo compatto a superficie ben levigata; dell'altezza di circa 15 cm. ciascuno e del diametro di 7 cm. Per ottenere dei cilindri di zolfo che possano resistere al peso di 60 o 70 kgr. senza rompersi, bisogna prendere dello zolfo puro e portarlo a completa

(1) *Osservazioni continue dell' elettricità atmosferica.* — Pubblicazioni del R. Istituto di Studi Superiore — Firenze 1884-85.

fusione dentro una capsula di porcellana piuttosto grande. Indi si lascia raffreddare agitando continuamente con una spatola di legno sino a che la massa prenda la consistenza di una crema, e poscia si cola nelle forme di cartone. Allorchè la massa è completamente solidificata si toglie dalle forme e può essere lavorata al tornio e alla lima, perch' essa acquista una durezza e una omogeneità molto più grande che quella dello zolfo ordinario. Si ottengono in tal modo dei cilindri a superficie perfettamente liscia, che può essere anche verniciata con gomma-lacca, e che presentano una grande resistenza alla pressione.

L' elettrometro Mascart possiede anch'esso un inconveniente, di poca o nessuna entità nelle esperienze di breve durata, ma che può condurre ad errori gravissimi nel nostro caso, in cui si tratta d' una registrazione continua: intendo parlare dello spostamento nella posizione dello zero, già osservato e discusso dai Proff. Roiti e Pasqualini nella citata memoria.

Ponendo in comunicazione col suolo l' ago dell' elettrometro ad intervalli di 24 ore, esso non ritorna alla sua posizione di riposo, ma rimane spostato dalla parte stessa secondo la quale avvennero le maggiori deviazioni durante le 24 ore; tali spostamenti sommandosi di giorno in giorno possono farsi grandissimi. La causa di questo fatto risiede, secondo il Prof. Roiti, nell' acido solforico in cui pesca l' ago dell' elettrometro e donde riceve la carica; ed i suoi studi precedenti sulla viscosità ed elasticità susseguente dei liquidi gli diedero anche la vera spiegazione del fenomeno (1).

Dimorando lungo tempo in quiete l' acido acquista in certo qual modo le proprietà dei solidi, come tutti gli altri liquidi vischiosi, cioè un certo assettamento molecolare, per cui la parte sommersa dell'ago, deviata ordinariamente per 24 ore dalla stessa parte, trova un certo ostacolo a tornare alla posizione di riposo, e non vi torna che dopo un tempo più o meno lungo.

(1) *Nuovo Cimento*, Serie III, Tomo III, Pisa 1878.

L' inconveniente è gravissimo perchè ne risulta alterata tutta la curva, e manca un criterio per misurare le sue ordinate che ci danno i valori del potenziale nei diversi punti. Il rimedio sarebbe di cambiare l' acido ogni giorno durante l' inverno, e due volte la settimana almeno durante l' estate, ma il Prof. Roiti volendo risparmiare tale noiosa manipolazione, soppresse la communicazione con l'acido sostituendo alla sospensione bifilare di seta, un solo filo d'argento sottilissimo, pel quale si guida la carica all' ago, e ricorrendo ad uno smorzatore ad alette.

Avrei senza dubbio realizzato anch' io una tale trasformazione, se gli scarsi mezzi di cui disponevo non me l' avessero impedito, pur tuttavia volendo ovviare a questo gravissimo inconveniente, ho messo in pratica un altro artifizio, già precedentemente adottato dal D.r Del Lungo nelle sue ricerche, e che io ho stimato ottimo: Tolta una delle traverse orizzontali allo smorzatore dell' ago, l' ho fatto pescare, appena quanto basti a sommergere completamente l' unica sbarretta rimasta, nel mercurio di una vaschetta, assieme all' altro filo di platino che conduce la carica. E poichè la presenza dell' acido è necessaria per mantenere secche le diverse parti dell' elettrometro, così la precedente vaschetta venne posta al centro dell' altra bacinella contenente l' acido solforico. Ho potuto constatare che le oscillazioni dell' ago erano divenute più rapide, cosicchè si aveva guadagnato in mobilità, perciò in prontezza, e, quel che più conta, potei assicurarmi dall' esperienza quotidiana, che era del tutto sparito l' inconveniente dello spostamento dello zero. Sembrerebbe dunque che il mercurio non presenta, o poco, quel fenomeno di elasticità susseguente.

Aggiungo finalmente che io ho soppresso del tutto l' illuminazione a benzina, sia perchè spesso, per la sua cattiva qualità, dava una fiamma molto fuliginosa, e quindi veniva poi a spegnersi, specie durante la notte quando non si potevano sorvegliare gli apparecchi, sia perchè coi forti calori estivi della Sicilia la benzina si volatilizzava troppo rapidamente dando una

fiamma molto grande, pericolosa per la cassa di legno dell'orologio a cui è attaccata la lampada, e per il pavimento dello stanzino d'osservazioni pur esso di legno. In sua vece vi ho sostituito l'illuminazione a gas acetilene, prodotto da uno speciale acetilenogeno, con consumo medio giornaliero di un chilogrammo di carburo di calcio. In tal modo si ottiene una fiamma che può essere facilmente regolata, ed in fine è evitato il pericolo d'incendio perchè l'apparecchio di produzione del gas vien posto all'aperto, e questo vien guidato dentro l'osservatorio da un'apposita conduttura.

Il fascio di luce che traversa la fenditura della lampada, raccolto da una lente, vien riflesso dallo specchietto unito all'ago dell'elettrometro, e poscia va a colpire, traverso una nuova fenditura perpendicolare alla prima, la carta sensibile del registratore Duboscq. Il quale è essenzialmente costituito da un orologio a pendolo che comunica il movimento ad un telaio, dove è posta la carta fotografica: il movimento avviene in modo che in 24 ore la carta scorre per tutta la sua lunghezza davanti alla fessura detta sopra, e il punto luminoso che la colpisce vi traccia così una curva rappresentante i valori del potenziale elettrico nell'aria.

*
* *

Esporrò ora in breve i risultati delle mie osservazioni, che sebbene esse siano in numero assai limitato, e tali da non poterne dedurre un risultato decisivo, pure quel poco che ho potuto fare merita, io credo, qualche considerazione.

La curva del potenziale elettrico dell'atmosfera presenta tre caratteri ben distinti dei quali conviene principalmente tener conto per istudiarla: 1. Le variazioni regolari, le quali sono state riconosciute periodiche con due massimi e minimi nelle 24 ore. 2. Le variazioni irregolari che da quelle piccole e incessanti che fanno dentata e bizzarramente sinuosa la curva, vanno

a quelle amplissime perturbazioni oscillatorie proprie del tempo burrascoso, quando il potenziale passa dal positivo al negativo.
3. Il valore delle ordinate, ossia del potenziale elettrico nelle diverse ore, nelle diverse giornate e nelle diverse stagioni.

Le curve ottenute a Catania mostrano, come tutte le altre ottenute altrove, queste variazioni regolari ed irregolari. Come altrove i due massimi e i due minimi si mostrano ben definiti nei giorni calmi e sereni, mentre basta un po' di cattivo tempo per perturbare il regolare andamento della curva.

Durante il bel tempo il potenziale si mantenne costantemente positivo, pur essendo variabilissimo; qualche volta, e solo per poco tempo a guisa di perturbazione, durante la pioggia è sceso negativo. Pare quindi che il potenziale dell' aria tenda sempre a mantenersi positivo, giacchè quand' esso passa al negativo non vi staziona a lungo, ma torna subito indietro.

In generale il periodo notturno ha un potenziale più basso e più regolare del rimanente periodo diurno. Il potenziale comincia a crescere nelle prime ore del mattino ed arriva al suo primo massimo verso le ore nove, decresce in seguito, celeremente prima e poi più lentamente, sino a raggiungere un primo minimo verso le ore quindici, indi torna ad aumentare per raggiungere il secondo massimo alle ore venti, per poi decrescere più o meno rapidamente e con indecisione sino alle ore ventidue: dopo di chè si hanno piccole variazioni con un secondo minimo poco deciso verso le ore due.

Conviene notare però che non si tratta di una rigorosa periodicità, giacchè i massimi ed i minimi di cui si parla non sono mai eguali in due giorni successivi, non soltanto per il loro valore differente, ma eziandio per le variazioni notevoli nelle ore in cui essi accadono, e le cifre da me riportate non sono che il risultato di una media. Ciò appare manifesto dalla seguente Tabella dove sono riportate le ore in cui si avverano i massimi ed i minimi, di elettricità.

TABELLA I. **Ore dei massimi e minimi di elettricità.**

DATA		Ore dei massimi		Ore dei minimi		*Osservazioni*
		1°	2°	2°	1°	
		h m	h m	h m	h m	
Agosto	23-24	8, 35	21, —	2, 20	— —	Un po' incerto il 2° minimo
»	24-25	8, 10	20, 15	2, 30	15, 10	
»	25-26	9, 25	19, 30	3, —	16, 40	
Settembre	5-6	10, 10	20, 50	1, 40	15, —	
»	6-7	— —	19, 40	— —	— —	Il 1° massimo e i due minimi sono fuori scala
»	7-8	10, —	19, —	1, 15	14, 15	
»	8-9	10, 25	20, 10	2, 40	16, —	
»	9-10	9, 40	21, 25	1, 30	13, 50	
»	12-13	8, 25	19, 30	2, 10	15, 30	
»	13-14	9, —	21, —	3, 20	15, 50	
»	14-15	8, 40	20, 35	0, 50	16, —	
»	15-16	8, 35	19, 10	3, —	13, 55	
»	17-18	9, —	19, 30	1, 30	14, —	
»	18-19	10, —	20, 20	3, —	16, 10	
»	19-20	8, —	19, 30	2, —	— —	Dal diagramma non appare il 2° minimo.
»	20-21	10, 10	20, 10	3, 10	15, 45	
»	21-22	9, 45	20, —	3, 40	16, 20	
»	22-23	9, 20	19, 45	1, 35	14, —	
»	23-24	10, 20	19, —	3, 15	14, 45	
»	24-25	8, 30	21, 25	1, 45	15, —	
»	26-27	9, 35	20, —	2, —	— —	Dal diagramma non è possibile scorgere un secondo minimo.
»	27-28	8, 30	19, 20	1, 50	14, 45	
»	28-29	8, 10	21, 20	3, —	14, 20	
»	29-30	9, 10	19, 25	2, 10	14, 30	
Ottobre	1-2	9, 45	19, 35	1, 50	14, —	
»	11-12	10, —	20, 50	1, 20	— —	Spentasi la lampada alle 11^h
Somme		h m **231, 20**	h m **522, 15**	h m **56, 20**	h m **315, 45**	
Numero dei termini .		**25**	**26**	**25**	**21**	
Medie		h m **9, 15**	h m **20, 5**	h m **2, 15**	h m **15, 20**	

Quanto ai valori del potenziale non mi è stato possibile, per lo scarso numero di giorni d' osservazione, ricavarne qualche conclusione sicura, tranne una conferma delle leggi sovraesposte. Durante tutto questo periodo autunnale in complesso il potenziale s' è mantenuto piuttosto basso, e ciò è pienamente d' accordo con quanto hanno trovato altri, i quali assegnano un massimo in Dicembre ed un minimo in Luglio. Riporto senza altro nella Tabella II i valori del potenziale elettrico ricavato dalle curve, colle medie in Volt per ora e per giorno.

Ho pure cercato di vedere se fosse possibile stabilire una qualche relazione tra l' andamento giornaliero del potenziale elettrico, e l' analoghe variazioni degli altri elementi meteorologici, la cui registrazione si fa giorno per giorno nel nostro Osservatorio.

Le variazioni della temperatura e della umidità relativa, come risulta dalle curve che vi si riferiscono, non indicano alcuna relazione con l' elettricità naturale, se se ne tolga la coincidenza più o meno fortuita di qualche massimo e di qualche minimo, e del resto il più delle volte le due curve non presentano alcuna analogia.

Pare invece che una certa relazione esista tra la tensione del vapore acqueo ed il potenziale dell'aria. Fra le tante curve della tensione effettiva da me disegnate, ne ho riscontrate diverse che mostrano un andamento grossolanamente analogo a quello dell' elettricità, per altre invece la coincidenza è perfetta. In generale i massimi ed i minimi delle due curve coincidono, però alle volte si spostano di qualche ora l' uno rispetto all'altro.

Nello stabilire la precedente relazione mi son servito pure delle curve del potenziale elettrico ottenute dal Dott. Del Lungo, gentilmente favoritemi dal Signor Direttore, e dai registri di questo Osservatorio ho ricavato pure le curve corrispondenti della tensione del vapore acqueo. Ho potuto constatare che la relazione sussiste ancora, almeno nella maggior parte dei casi, il che è una prova della giustezza di quelle osservazioni.

Tabella II.

Potenziale elettrico dell' atmosfera.

Data		Potenziale di prova	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	Media
1903 Agosto	24	12 mm. = 20 el.	6,7	6,7	6,7	28	26,7	58	53	68	66	[illegible]	[illegible]	30	20,8	6,4	—	—	—	32	22	38	24	22	26	22	31
»	25	»	28	20	26	—	—	—	—	32	30	[illegible]	[illegible]	30	33	30	28	30	12	54	60	64	64	60	60	51	40,1
»	26	»	50	50	42	17	52	51	58	58	59	[illegible]	[illegible]	50	54	50	56	41	11	—	—	—	—	—	—	—	51,4
Settembre	5	»	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—		—	—	44	51	64	57	54	51	16	—
»	6	»	40	48	49	51	54	50	55	62	75	76	66	54	48	41	36	50	52	32	28	52	26	23	18	12	15,8
»	7	»	10	11	10	9	6	—	—	—	—	—	[illegible]	20	—	—	—	—	—	22	25	20	20	18	14	11	11,9
»	8	»	17	19	18	17	—	—	13	17	18	30	[illegible]	27	25	22	22	29	28	32	34	37	27	26	25	22	24,2
»	9	»	19	20	17	17	17	22	18	10	16	30	[illegible]	26	25	21	23	6	15	20	26	29	38	36	37	29	22,7
»	10		30	42	36	41	55	48	50	54	56	50	46	43	3	14	24	35	14	21	6	15	20	16,7	15	15	34
»	12	14 mm. = 20 el.	—	—	—	—	—	—	—	—	—		[illegible]	30	13	34	14	13	14	24	34	35	24	24	21	21	23,2
»	13	»	18,6	17,2	20	17	20	25	32	38,6	41	34	[illegible]	—	—	—	—	—	—	28	26	26	30	27	27	22	26,8
»	14	»	18,6	13,6	14	10	12	12,9	15	17	25,7	[illegible]	[illegible]	14	14,3	15	10,6	13	17	11	12	15	21	18	19	17	15,6
»	15	»	20	19	19	20	20,7	22,9	26	28	32	[illegible]	[illegible]	32	31	30	27	5	24	24	15	6	3	3	—1,5	3	18,4
»	16	»	7,2	—2	—4	0	2	2,2	2,8	10,7	5,7	[illegible]	[illegible]	3	4	3	0	3	—2	—3	—	—	—	—	—	—	1,9
»	17	»	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—		—	—	—	—	—	—	—	27	20	9	14	14	21	—
»	18	16 mm. = 20 el.	10,9	20	16	14	12	11,4	8,5	8,6	22	[illegible]	11	7	10	7	17	10	13	5	27	29	12	7	2	1	12,2
»	19	»	—2,5	3,5	3	5	—2,5	3,7	2,5	6	11	27	17	21	26	23	21	15	24	35	35	32	24	19	16	16	15,6
»	20	»	15	13,6	15	15	15	15	21	33	25	[illegible]	[illegible]	28	32	30	29	30	40	38	36	44	33	25	24	21	25,8
»	21		22,5	20	10	19	17,5	19	21	27	26	37	34	32	33	32	26	33	28,5	21	20	33,7	26	22,5	27,5	24	25,5
»	22	»	22,5	18,7	17	16	18,7	20	21	27,5	31	[illegible]	[illegible]	28	27	21	27,5	16	27	20	16	22,5	20	22	21	19	22
»	23		18,7	20	20	22	21	20	22	20	36		[illegible]	26	33,5	21	28,7	—	—	23	30	20	21	23	24	20	21,3
»	24		18,7	17,5	10	19	17,5	20	15	18	20	[illegible]	16	20	21	18	20	21	25	24	14	16	20	16	11	10	18
»	25	»	10	11,2	11	11	12	10	—	21	21	[illegible]	20	20	18	17	12,5	25	27,5	—	—	—	—	—		—	16,7
»	26		—	—	—	—	—	—	—	—	—		—	—	—	—	—	—	—	28,7	20	27,5	24	21	19	13	—
»	27		12,4	10	14	15	14	13,8	13,5	15	25	19	16	17	20	27	27,5	21	27	28,7	30	22	19	17,5	15	14	18,9
»	28	»	12,7	21	22	27	26	32,6	31	35	26	[illegible]	[illegible]	20	18,4	15	16	18	27	17	16	27	30	12	12,5	9	21
»	29		15	7,5	7	16	10	11,8	10	20	6		[illegible]	15	10	7	15	16	5	0	9	3,7	14	15	12	17	10,8
»	30	»	18	15	20	21	23	31	37	41	45	46	46	35	44	32	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	32,6
Ottobre	1		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	20	25	26	10	1	8,5	10	
»	2	»	16	8	10	10	10,4	11	12	19	35	[illegible]	[illegible]	15	18	15	20	16	16	20	—	—	—	—	—	—	16,1
»	11	»	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	27	19	19	36	28	19	27	
	12	»	—	10	39	16	15	15	13,7	25	26	[illegible]		—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	24,5
Somme			456	490	461,7	483	475	526,3	551	712,4	779,4	[illegible]	[illegible]	643	582	537,4	500,8	446	538	618,4	663	743,4	652	573,7	550	493	
Numero dei termini			25	26	26	25	24	23	23	25	25	[illegible]	[illegible]	25	24	24	22	21	21	27	26	26	26	26	26	26	
Medie in elementi			18,2	18,8	17,7	19,3	19,7	22,8	23,9	28,5	31,1	[illegible]	[illegible]	25,7	24,2	22,4	22,7	21,2	25,6	24	25,5	28,6	25,1	22	20,8	18,9	
Potenziale in Volt			15,5	16	15 m	16,4	16,7	19,4	20,3	24,2	26,4 M	[illegible]	[illegible]	21,8	20,5	19	19,3	18 m	21,7	20,4	21,7	24,3 M	21,3	18,7	17,6	16,1	

Tabella III.

Tensione del vapore acqueo in millimetri di mercurio.

DATA 1913		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Agosto	24	9,38	9,59	9.23	9,30	9,72	9,53	9,02	9,45	7,77	8,11	10,23	…,02	10,62	12,56	13,12	10,78	9,72	10,34	9,65	10,28	11,73	10,17	10,04	9,69
»	25	8.65	8,30	8,57	8.73	8,58	9,41	8,75	10,08	14,34	12.53	9,87	…,42	9,95	9,03	8,69	9,60	9,64	9,95	10,39	12.65	14,52	11.78	9,87	9,00
»	26	9,23	9,40	9,21	9,11	9,37	9,96	8,54	9,10	8.42	8,93	11,55	…,43	11,37	12,19	14.37	11,83	12,70	12,12	12,39	11,35	17,07	12,76	10,95	9,64
Settembre	6	9,70	10,51	9,46	10,82	10,11	11,03	9,22	11,68	12,12	10,32	11,61	…,75	11,30	10,39	12,86	11,91	11,82	10,58	10,65	12,46	13,45	10,64	10,03	9,83
»	7	11,23	11,20	10,80	10.40	10,02	9.50	9,88	10,00	11,26	10,00	11,12	12,19	12,37	12,04	14,34	12,13	12,19	11,79	11,68	11,31	11,98	11,27	11,18	11,34
»	8	12,06	11,10	11,03	10,22	10,85	9,76	10,48	10,27	11,41	10,86	10,44	…,69	12,94	12,02	15,04	11,08	12,04	11,86	11,40	12,11	16,51	13,11	11,89	11,59
»	9	10,50	9,00	8,50	7,00	7,75	9,00	10,91	10.76	11,06	10,05	9,51	…,42	9,65	12,26	17,56	10,90	10,50	10,43	10,75	13,82	17.34	14,10	12,90	11,00
»	10	11,95	12,28	11.55	10,75	10,14	9,65	9,89	9.37	6,33	8,44	10,70	11,92	11,42	8,17	9,86	10,64	10,98	9,81	8,41	8,73	9,66	9,50	9,16	10,62
»	12	9,30	8,90	8.70	8,02	9,56	10,83	12,12	12,40	14,76	12,69	10,49	…,30	9,68	7.73	7,06	8,00	10,50	10,82	11,75	12,50	15,91	12,98	11,92	9,90
»	13	9,27	8,52	8,30	8,25	8,75	11,56	16,77	17,81	19,11	16,83	12,83	…,95	10,00	9,58	9,72	9,00	10,02	10,10	11.40	14,50	20,53	15,39	12,08	9.73
»	14	11,13	10,81	9,56	8,72	7,80	10,91	19,27	18,91	19,79	16,05	12,81	…,87	10,37	10,00	9,51	10,51	11,70	11,21	11,69	13,22	18,30	13,05	12,70	11,85
»	15	8,70	8,50	9,50	9,65	9.92	11,35	15,37	13,47	12,12	10,99	10,18	10,35	10,72	12,27	14,59	10,50	9,73	8,38	8,10	8,96	9,92	9,86	8,72	8,20
»	16	8,60	9.30	9,42	9,96	7,60	10,23	10,27	10,12	14,35	10,30	9,27	…,27	11,52	9,00	7,26	10,49	9,75	10,25	10,41	9,90	10,16	11,50	11,22	10,00
»	17	8,72	7.35	7,24	7,32	7,85	8.15	9,54	9,75	8,89	7,50	11,10	12,74	12,72	11,32	9,30	10,40	9,65	8,72	8,85	9,05	6,77	9,57	8,25	9,65
»	18	10,49	10,20	9,71	9,21	8,81	8,60	7,91	7,20	7,17	7,05	9,65	12,74	13,82	12,10	11,02	12,70	11,35	11,75	11,42	10,74	10,51	11,60	11,82	11,28
»	19	13,25	11,35	10,75	10,62	10,54	10,69	9,74	10,00	10,25	9,75	9,95	9,76	12,29	12,25	10,14	13,65	14,76	13,85	12,99	11,25	11,10	13,12	12,75	12,12
»	20	13,21	12,75	10,10	9.80	9,55	9,42	10,78	10,10	12,35	10,81	9,85	…,99	10,99	12,76	13,61	12.65	13,24	14,38	14,64	14,65	14,11	14,20	13,89	13,70
»	21	10,22	10,02	10,80	10,87	11,28	13,25	13,59	13,83	14,68	13,39	12,80	13,22	15,64	15.52	14,94	13,32	12,25	11,37	12,87	11,13	14,26	13,30	13,15	12,54
»	22	15,43	15,27	14,80	14,18	17,05	15,32	13,11	12,65	12,70	11,37	12,37	12,94	15,84	15,85	13,32	12,39	12,88	13.82	14,54	14,95	14,95	15,06	14,70	14,02
»	23	10,41	9.31	8,51	11,00	12,11	13,02	15,96	15,15	15,39	13,00	11,31	…,06	15,32	16,54	16,60	13,22	14,11	13,01	12,23	14,21	15,53	13,33	12,52	11,04
»	24	6,51	6,60	6,72	7,10	8,30	9,02	13,69	11,35	12,17	11,17	10,26	…,35	12,53	14,32	14,44	12,11	10,10	9,40	9,72	11,21	12,65	9,32	8,84	8,50
»	25	5,32	5,11	5,31	5.16	6,11	8,41	10,88	9,55	12,01	10,31	9,02	9,32	10,01	10,22	11,61	8,24	8,16	9,21	9,23	9,44	12,00	9,30	8,22	7,63
»	26	8,10	8,04	7,51	8,91	7,22	7.11	12,18	12,04	12,68	12,32	10,71	10,75	11,23	11,15	10,72	8,51	9,24	9,61	10,00	10,22	10,96	9,11	9,12	9,13
»	27	7,32	7,08	6,02	6,35	7,51	9,52	11,05	9,48	11,98	10,61	10,52	…,04	12,00	11,12	11,25	8,81	9,25	8,22	10,10	10,25	10,12	9,66	9,11	9,43
»	28	10,22	9,61	9,30	8,30	10,50	11,36	11,43	11,27	12.19	11,31	11,10	12,64	12,20	13,04	11,06	9,88	9,70	10,22	10,21	12.12	10,96	10,31	9,91	11,11
»	29	12,80	12,50	12,22	10,91	11,80	12,10	13,08	12,50	13,45	12,81	11,10	10,74	12,70	13,00	12,78	11,00	13,12	11,12	11,64	12,35	13,33	11,80	12,70	12,40
»	30	12,25	10,24	10,10	12,61	12,80	11,10	13,33	13,00	13,87	12,65	12,50	13,27	11,40	11,42	13,22	12,06	13,00	12,40	11,31	11.40	13,33	12,40	12,15	12,61
Ottobre	1	11,85	12.15	10,40	11,20	11.37	11,23	11,58	13,23	13,31	10,12	10,23	…,00	13,60	14,00	12,09	12,29	14,87	13,35	12,81	12,94	11,71	12,27	11,70	11,50
»	2	10,22	8,35	7,31	9,42	9,21	8,55	8,87	9,35	11,55	10,65	10,20	10,70	11,52	13,50	12,93	10,54	11,68	11,81	10.25	10,50	11,80	10,14	10,20	10,30
»	11	7,10	7,82	7,32	7,10	7,32	7,52	6,64	7,53	7,92	7,81	8,50	9,64	10,32	12,65	5,09	9,34	9,80	9,60	9,04	9.23	6,48	6,90	7,21	8,00
Somme		303,25	291. 19	278,01	281. 02	289,84	307,09	343. 85	342,00	365. 70	328,79	321.76	…,44	354,04	358,00	358,10	328,54	338,45	329,18	330,52	353.43	387,95	316,50	328,90	317,35
Numero dei termini		30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
Medie		10.11	9,70	9,26 m	9.36	9,66	10.23	11,46	11,40	12,19 M	10,96	10,72	11,25	11,80	11,93	11,93	10,95 m	11.28	10,98	11,02	11,78	12,93 M	11,55	10,96	10,58

Nella Tabella III sono riportati i valori della tensione del vapore acqueo in ciascuna delle 24 ore, di tutti quei giorni per cui ho costruito la relativa curva, scegliendo sempre giorni calmi e sereni, ed ho fatto anche le medie per ore di tutti i 30 giorni d' osservazione. Da essa appare subito che le ore in cui cadono i massimi ed i minimi di tensione sono presso a poco quelle stesse in cui si avverano quelli di elettricità; però la relazione non appare tanto evidente dalla media generale, quanto dal confronto delle singole curve giornaliere corrispondenti.

Ma quello che più reca sorpresa si è la grande rassomiglianza tra la curva dell' elettricità e quella barometrica diurna, e la loro coincidenza è tanto più spiccata quanto più calme e serene sono le giornate.

L' intima relazione tra l' elettricità atmosferica e le variazioni diurne del barometro è un fatto veramente singolare e degno di tutta l' attenzione degli studiosi di meteorologia. Essa è stata notata anche da Everett e Whipple (1) a Kew, da Ellis a Greenwich, da Ragona (2) a Modena, da Roiti e Pasqualini a Firenze, ed io la trovo confermata anche quì a Catania.

Ed è curioso che mentre la pressione atmosferica mostra una stretta relazione con l'elettricità dell'aria, viceversa gli elementi da cui la pressione dipende principalmente, cioè la temperatura e l' umidità relativa, non mostrano alcuna relazione con l' elettricità atmosferica. Ciò mi induce a credere che sulle variazioni diurne barometriche influiscano non poco anche quelle dell'elettricità, e che queste alla loro volta dipendano da un' altra causa a noi sconosciuta. Ma su questo particolare io non oso affatto pronunziarmi, e lascio il giudizio definitivo ai dotti, perchè l'argomento è tale da richiedere un lungo e profondo studio e una larga discussione.

In particolare ritengo che a più sicure conclusioni si per-

---

(1) Observation of Atmospheric Electricity at the kew Observatory during 1880. By G. M. Whipple, Superintendent—Report of the British Association 1881.

(2) Memorie dell' Accad. di Scienze, Lettere ed Arti di Modena—Anno 1870, Tomo XI, pag. 10.

verrà quando le osservazioni dell' elettricità atmosferica si facciano contemporaneamente in parecchie stazioni, e si possano rendere paragonabili fra loro le diverse curve ottenute insieme in luoghi vicini e lontani, alti e bassi, sul mare e in terraferma. È da augurarci quindi che nei numerosi nostri Osservatorii meteorologici si attenda assiduamente a queste importantisime ricerche, che si collegano con tanti problemi insoluti di fisica terrestre, relativi al magnetismo, alle correnti telluriche, all'aurora boreale, ed, interessando anche la vita pratica, agli effetti disastrosi della grandine e dei colpi di fulmine.

Ma affinchè si generalizzino nei nostri Osservatorii le ricerche sull'elettricità atmosferica, parmi che bisognerebbe semplificare gli apparecchi a ciò destinati e che se ne renda più pratico il loro uso, perchè appunto la ragione principalissima per cui molti non intraprendono o hanno abbandonato queste osservazioni sta nel fatto che, oltre al paziente lavoro di sviluppo fotografico delle curve, si richiede un' assidua sorveglianza degli apparecchi, e tutte quelle cure le più diligenti e meticolose per ben regolarli onde il loro funzionamento sia esatto. Un passo in questo senso è stato fatto dal Chiar.[mo] Prof. L. Palazzo, Direttore dell' Osservatorio di Roma, il quale in una sua recente comunicazione fatta nella riunione della Commissione Internazionale per lo studio dell' alta atmosfera, descrive un apparecchio registratore da lui ideato, molto semplice ed ingegnoso, destinato per le osservazioni durante le ascensioni in pallone, o con cervi volanti: certamente questo strumento, od uno somigliante, con opportune modificazioni potrebbe servire ad uno studio (almeno sommario) dell' elettricità atmosferica anche negli Osservatorii.

Compio infine il dovere di porgere i miei più sentiti ringraziamenti al Chiar.[mo] Prof. A. Riccò, il quale mi ha fornito di tutti i mezzi necessari per queste mie ricerche, e di tutti quegli utili e sapienti consigli necessari per ben condurre tali delicate osservazioni.

Catania Gennaio 1901.

Dal R. Osservatorio Astrofisico e Meteorologico.

Sugl' integrali delle equazioni del moto d' un punto materiale

Nota II. del Dott. VINCENZO AMATO

In questa Nota, che fa seguito all' altra pubblicata negli Atti di quest'Accademia (Serie 4ª, vol. XIV, che diremo Nota I), sarà dato un metodo per costruire due integrali primi comuni a più problemi del moto d'un punto sopra una superficie variabile col tempo di posizione e anche di forma (nell' ipotesi generale che la forza sollecitante dipenda dal tempo, dalla posizione e dalla velocità del punto materiale di massa unitaria), ovvero due integrali primi comuni a più problemi del moto di un punto sopra una superficie fissa, nel caso in cui la forza dipenda dalla posizione e dalla velocità del punto (Korkine, *Mathematische Annalen*, vol. II, 1870).

Sarà inoltre data una concisa dimostrazione di un teorema del Korkine che stabilisce come condizione necessaria, per l'esistenza di due integrali primi comuni a più problemi del moto d'un punto sopra una superficie fissa, la sviluppabilità della superficie stessa, quando la forza dipenda soltanto dalla posizione del punto.

1. Le equazioni differenziali del moto d'un punto sopra una superficie si possono scrivere così

$$u'' = U, \quad v'' = V,$$

dove le U, V sono funzioni delle t, u, v, u', v' (Cfr. Nota I, § 1).

Se

$$W(t, u, v, u', v') = a$$

è un integrale primo comune a due problemi (U, V), (U_1, V_1) deve soddisfare simultaneamente le equazioni

$$\left.\begin{aligned} A\,(W) &= \frac{\partial W}{\partial u'} - k\,\frac{\partial W}{\partial r'} = 0, \\ B\,(W) &= \frac{\partial W}{\partial t} + u'\,\frac{\partial W}{\partial u} + r'\,\frac{\partial W}{\partial r} + l\,\frac{\partial W}{\partial r'} = 0, \\ C\,(W) &= \frac{\partial W}{\partial u} + k\,\frac{\partial W}{\partial r} - \Big[A\,(l) - B\,(k)\Big]\frac{\partial W}{\partial r'} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

dove k ed l hanno significati noti (Nota I. § 11).

Perchè il sistema (1) sia jacobiano, cioè perchè esistano *due* integrali primi comuni a più problemi debbono essere soddisfatte le condizioni

$$A\,(k) = 0, \quad A\,(l) = 2\,B\,(k), \quad B\,[B\,(k)] = C\,(l).$$

Dalla prima si ha

$$k = \varphi\,(t, u, r, r' - ku'),$$

essendo φ una funzione arbitraria.

Assumendo, in luogo di r', la nuova variabile w data dall'equazione

$$r' = w + \varphi\,(t, u, r, w)\,u',$$

si ha

$$l = w\,\Phi + 2\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + w\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \Phi\,\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)\right] u'$$

$$+ \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + w\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \Phi\,\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)\right]\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right\} u'^2,$$

essendo $\Phi\,(t, u, r, w)$ una nuova funzione arbitraria.

Col precedente cambiamento di variabile, posto

$$W\,(t, u, r, u', r') = \Lambda\,(t, u, r, u', w),$$

si ha dalle due prime equazioni del sistema (1)

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial u'} = 0,\\
&\frac{\partial A}{\partial t} + w\frac{\partial A}{\partial r} + w\,\Phi\frac{\partial A}{\partial w} = 0,\\
&\frac{\partial A}{\partial u} + \varphi\frac{\partial A}{\partial r} + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + w\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \Phi\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)\right]\frac{\partial A}{\partial w} = 0,
\end{aligned}\right\}\quad (2)$$

che, dovendo ammettere due integrali distinti, deve essere jacobiano.

Trasformando allora le variabili r, w nelle altre r, s per mezzo delle relazioni

$$r = f_1\,(t, u, r, s),$$

$$w = f_2\,(t, u, r, s),$$

si deve porre, restando nella maggiore generalità,

$$f_2 = \frac{\partial f_1}{\partial t}\,.$$

$$\varphi\,(t, u, r, w) = \varphi_1\,(t, u, r, s) = \frac{\partial f_1}{\partial u} + \alpha\,(u, r, s)\frac{\partial f_1}{\partial r} + \beta\,(u, r, s.)\frac{\partial f_1}{\partial s}\,.$$

$$\Phi\,(t, u, r, w) = \Phi_1\,(t, u, r, s.) = \frac{1}{\dfrac{\partial f_1}{\partial t}}\;\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}\,.$$

dove la f_1 è vincolata dalla sola condizione

$$\frac{\partial f_1}{\partial r}\,\frac{\partial^2 f_1}{\partial t\,\partial s} - \frac{\partial f_1}{\partial s}\,\frac{\partial^2 f_1}{\partial t\,\partial r} = 0.$$

e dove le α, β sono funzioni arbitrarie. Il sistema (2) sarà allora jacobiano e ci fornirà i due integrali comuni (*).

(*) Tutto ciò che precede è svolto ampiamente nel § II della Nota I.

Posto

$$\Lambda\,(t, u, v, w) = \Lambda_1\,(t, u, r, s),$$

poichè

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = w, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = w\,\Phi,$$

si ha

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial t} = \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial t}\,\frac{\partial \Lambda}{\partial r} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}\,\frac{\partial \Lambda}{\partial w} = \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + w\,\frac{\partial \Lambda}{\partial r} + w\,\Phi\,\frac{\partial \Lambda}{\partial w} = 0,$$

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial u} = \frac{\partial \Lambda}{\partial u} + \frac{\partial f_1}{\partial u}\,\frac{\partial \Lambda}{\partial r} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial t\,\partial u}\,\frac{\partial \Lambda}{\partial w}\,,$$

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial r} = \frac{\partial f_1}{\partial r}\,\frac{\partial \Lambda}{\partial r} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial t\,\partial r}\,\frac{\partial \Lambda}{\partial w}\,,$$

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial s} = \frac{\partial f_1}{\partial s}\,\frac{\partial \Lambda}{\partial r} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial t\,\partial s}\,\frac{\partial \Lambda}{\partial w}\,.$$

Dalle tre ultime uguaglianze e dalle altre

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} + \alpha\,\frac{\partial f_1}{\partial r} + \beta\,\frac{\partial f_1}{\partial s} = \varphi,$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial t\,\partial u} + \alpha\,\frac{\partial^2 f_1}{\partial t\,\partial r} + \beta\,\frac{\partial^2 f_1}{\partial t\,\partial s} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + w\,\frac{\partial \varphi}{\partial r} + w\,\Phi\,\frac{\partial \varphi}{\partial w}\,,$$

segue

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial u} + \alpha\,\frac{\partial \Lambda_1}{\partial r} + \beta\,\frac{\partial \Lambda_1}{\partial s} =$$

$$= \frac{\partial \Lambda}{\partial u} + \varphi\,\frac{\partial \Lambda}{\partial v} + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + w\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \Phi\,\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)\right]\frac{\partial \Lambda}{\partial w} = 0.$$

E però il sistema (2) si trasforma nell' altro

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial u'} = 0,$$

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial u} + \alpha\,\frac{\partial \Lambda_1}{\partial r} + \beta\,\frac{\partial \Lambda_1}{\partial s} = 0\,,$$

ovvero nell' unica equazione

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial u} + \alpha \frac{\partial \Lambda_1}{\partial v} + \beta \frac{\partial \Lambda_1}{\partial s} = 0, \tag{3}$$

che ammette due integrali distinti, essendo le u, v, s variabili indipendenti.

Distinguiamo ora due casi:

a) Siano date le α, β. Si trovino i due integrali, risoluti rispetto alle costanti, del sistema

$$du = \frac{dv}{\alpha} = \frac{ds}{\beta}$$

di equazioni differenziali ordinarie. Operando sui due integrali trovati il seguente prodotto di trasformazioni

$$\begin{aligned} u &= u, & u &= u, \\ v &= f_1\ (t, u, v, s), & v &= v, \\ w &= f_2\ (t, u, v, s) = \frac{\partial f_1}{\partial t}, & v' &= w - \varphi\,(t, u, v, w)\, u', \end{aligned}$$

dove φ è la funzione trasformata di

$$\varphi_1 = \frac{\partial f_1}{\partial u} + \alpha \frac{\partial f_1}{\partial v} + \beta \frac{\partial f_1}{\partial s},$$

per mezzo delle relazioni

$$v = f_1\ (t, u, v, s),$$

$$w = f_2\ (t, u, v, s) = \frac{\partial f_1}{\partial t},$$

si hanno i due più generali integrali primi, funzioni delle t, u, v, u', v', comuni a tutti i problemi (U, V) del moto d'un punto sopra una superficie variabile col tempo di posizione e anche di forma (nell' ipotesi generale che la forza sollecitante dipenda

dal tempo, dalla posizione e dalla velocità del punto), quando le forze soddisfino la condizione (*)

$$V - k\,U = l\,;$$

b) Siano date le equazioni

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_1\,(u,r,s) &= c_1\,, \\ \Lambda_2\,(u,r,s) &= c_2\,, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

con Λ_1, Λ_2 funzioni arbitrarie e tali che sia diverso da zero il determinante funzionale rispetto alle r, s.

Sono determinate allora le due funzioni $\alpha = \frac{\partial r}{\partial u}$, $\beta = \frac{\partial s}{\partial u}$ in modo che le (4) sieno integrali d'un' equazione della forma (3).

Da quanto precede si può conchiudere:

Assegnate due funzioni delle variabili indipendenti u, r, s

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_1\,(u,r,s) &= c_1\,, \\ \Lambda_2\,(u,r,s) &= c_2\,, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

tali che sia diverso da zero il loro determinante funzionale rispetto alle r, s, *ed uguagliate a due costanti arbitrarie, è nota la trasformazione da operare sulle* u, r, s *per passare alle variabili* t, u, v, u′, v′ *e mediante questa trasformazione le* (5) *costituiscono un sistema di due integrali primi, in funzione delle* t, u, v, u′, v′, *comuni ai problemi* (U, V) *pei quali sia* (**)

$$V - k\,U = l.$$

2. Ora si può analogamente, prendendo le mosse dai risultati contenuti nella mia Nota: *Sull' integrazione d' un' equazione* (Giornale di Matematiche di Battaglini, settembre 1901), stabi-

(*) Nota I, pag. 4.

(**) La condizione $V - k\,U = l$ si può esprimere introducendovi le variabili t, u, r, s, u' (Nota I, pag. 11).

lire la trasformazione relativa al sistema di due integrali primi comuni a più problemi del moto d' un punto sopra una superficie fissa, nell' ipotesi che la forza sollecitante dipenda dalla posizione e dalla velocità del punto.

Infatti i risultati della Nota ora citata si possono enunciare così :

Sia r una variabile ausiliaria ed $F\,(u,\ v,\ r)$ una funzione qualunque delle $u,\ v,\ r$. Consideriamo le formole

$$\Phi_1 = \frac{\partial F}{\partial v}\,,\ \varphi_1 = F\left[\ \beta\,(u,v) - \int \frac{\partial\left(\frac{1}{F}\right)}{\partial u}\,dr - \alpha\,(u,v)\int \frac{\partial\left(\frac{1}{F}\right)}{\partial v}\,dr\ \right], \tag{6}$$

dove le α, β sono funzioni arbitrarie, e dopo aver fatte le differenziazioni e le integrazioni indicate, sostituiamo r col suo valore in funzione delle $u,\ v,\ w$ che si ha dall'equazione

$$w = F\,(u,\ v,\ r).$$

Allora le (6) daranno per

$$\varphi\,(u,\ v,\ w) = \varphi_1\,(u,\ v,\ r)$$

e per

$$\Phi\,(u,\ v,\ w) = \Phi_1\,(u,\ v,\ r)$$

i valori più generali che queste funzioni possono avere e che rendono jacobiano il sistema

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial v} + \Phi\,\frac{\partial \Lambda}{\partial w} = 0,$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial u} + \left[\ w\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \Phi\,\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right) - \varphi\,\Phi\ \right]\frac{\partial \Lambda}{\partial w} = 0. \tag{7}$$

Questo sistema fornisce così un integrale primo comune a più problemi. Trovato questo integrale

$$\Lambda\,(u,\ v,\ w) = a$$

poichè

$$w = v' - \varphi u',$$

risolvendo rispetto a dt l'equazione

$$\Lambda = a,$$

si ottiene, con quadratura, l'altro integrale primo comune

$$t + b = \mu \; (u, v, a),$$

dove le a, b sono due costanti arbitrarie (Korkine, Mem. cit., § 7).

Ciò posto, tenendo conto delle (6), al sistema (7) si può sostituire l'equazione

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial u} - \alpha \; (u, r) \frac{\partial \Lambda_1}{\partial r} = 0 \tag{8}$$

Come nel § 1, si possono distinguere due casi:

a) Sia data la funzione α. S'integri l'equazione

$$\frac{dr}{du} = \alpha$$

e l'integrale ottenuto, risoluto rispetto alla costante, si trasformi, in funzione delle variabili u, r, w, per mezzo della relazione

$$w = F \; (u, v, r), \tag{9}$$

dove F è una funzione qualunque, supposta assegnata. Si trovi l'altro integrale primo comune nel modo anzidetto e si operi infine sui due integrali trovati la trasformazione

$$u = u \quad r = r, \quad v' = w + \varphi \; (u, v, w) \; u',$$

dove φ è la funzione trasformata di

$$\varphi_1 \; (u, r, r) = F \left[\beta \; (u, r) - \int \frac{\partial \left(\frac{1}{F} \right)}{\partial u} dv - \alpha \; (u, r) \int \frac{\partial \left(\frac{1}{F} \right)}{\partial r} dr \right],$$

per mezzo della (9). Si hanno così i due più generali integrali primi comuni a più problemi.

b) Sia data una funzione

$$\Lambda_1 (u, v) = c,$$

dove c è una costante arbitraria. Si risolva l'equazione

$$\frac{\partial \Lambda_1}{\partial u} + \alpha \frac{\partial \Lambda_1}{\partial v} = 0$$

rispetto ad α. Siamo così ricondotti al caso precedente.

Dunque, *assegnata una funzione qualunque* Λ_1 (u, v), *è nota la trasformazione da operare sulle* u, v *per passare alle variabili* t, u, v, u', v' *e mediante questa trasformazione la funzione data ed un'altra che si ottiene da essa con una integrazione, uguagliate a due costanti, costituiscono un sistema di due integrali primi comuni a più problemi, in funzione delle* t, u, v, u', v'.

3. Le equazioni differenziali del moto d'un punto sopra una superficie fissa si possono scrivere così (Nota I, pag. 10)

$$u'' = \frac{GM - FN}{EG - F^2} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} u'^2 - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} u' v' - \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} v'^2 = U,$$

$$v'' = \frac{EN - FM}{EG - F^2} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} u'^2 - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} u' v' - \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} v'^2 = V.$$

Supponiamo che le M, N, dipendano solo dalle u, v. Allora si avrà

$$k = \varphi (u, v).$$

Si può quindi trovare una funzione μ delle u, v tale che sia

$$\mu (v' - \varphi u') = m',$$

dove m' è la derivata d'una funzione m (u, v) rispetto a t.

Assumendo come coordinate curvilinee le $m =$ cost. ed un altro sistema di linee $n =$ cost., e continuando a chiamare rispettivamente questi sistemi di linee colle lettere u, v, si ha

$$\frac{\partial W}{\partial v'} = 0.$$

Infatti la prima equazione del sistema (1) ci dice che W dipende dalle u', v' per mezzo dell'espressione $v' - \varphi u'$.

Si rientra così nell'ipotesi fatta nella Nota I e quindi, per l'esistenza di due integrali comuni, occorre che sia

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0.$$

La seconda di queste condizioni ci dice che le linee u sono *geodetiche* della superficie data, mentre le due condizioni esprimono l'annullarsi della curvatura totale della superficie, la quale perciò deve essere *sviluppabile* (*).

Catania, Aprile 1904.

(*) Nella nota I la dimostrazione è relativa al caso particolare in cui sia $\frac{\partial W}{\partial v'} = 0$, mentre qui è provato che il caso generale si può ricondurre a quello.

Istituto zoologico della R. Università di Catania
diretto dal Prof. A. Russo

Primo contributo alla conoscenza dei Crostacei decapodi abissali del Compartimento marittimo di Catania

Memoria di FRANCESCO MAGRÌ

Lo studio della fauna abissale in questi ultimi anni ha acquistato una notevole importanza sia per la distribuzione geografica e batimetrica delle forme viventi nelle grandi profondità marine, sia per gli adattamenti a cui le forme stesse vanno soggette.

Le esplorazioni abissali fatte nel Mediterraneo fino ad oggi sono ben poche, per cui scarse sono le nostre conoscenze su tale argomento.

Fra tali campagne ricordo quella fatta ad iniziativa del Giglioli e del Magnaghi sul *Washington* nel 1881: quella che si svolse nell'Adriatico e nel bacino orientale del Mediterraneo sul *Pola*, nave della marina Austriaca, e le ricerche eseguite recentemente nel golfo di Napoli col *Maia* dal defunto F. A. Crupp e dal dr. S. Lo Bianco.

Occupandomi da tre anni dei *Crostacei decapodi* del Compartimento marittimo di Catania, e confrontando i dati da me raccolti con quelli ottenuti su tali animali nelle esplorazioni precedenti, mi sono accorto che 17 specie della mia collezione sono state citate dai precedenti autori come forme esclusivamente abissali, mentre ho potuto assicurarmi che nel nostro mare si trovano a profondità relativamente più piccole.

Per tale ragione ho creduto non privo d' interesse pubbli-

carne un succinto elenco allo scopo di contribuire alla migliore conoscenza delle forme abissali.

A ciascuna specie, quando il bisogno l'ha richiesto, per meglio chiarire i caratteri diagnostici, ho fatto seguire delle osservazioni desunte dall'esame degli esemplari della mia collezione.

Per la classificazione mi sono riferito a quella dell'*Edwards*, del *Carus* e di altri autori più recenti.

CRUSTACEA DECAPODA

MACRURA

NATANTIA

Fam. Penaeidae — Sp. Bate.

Sottofam. *Penaeinae* — Ortm.

1. Penaeus caramote — Desm.

È abbondante nel Compartimento marittimo di Catania, abita alla profondità di 50-60 m. circa, e quasi quotidianamente comparisce sul mercato in notevole quantità.

Gli esemplari in collezione sono stati catturati colle nasse nella baia di Catania.

Fam. Penaeidae — Sp. Bate

Sottofam. *Penaeinae* — Ortm

2. Penaeus membranaceus — Risso

È abbondante nel Compartimento marittimo di Catania; infatti, nel mercato ci si mostra copioso in ceste, insieme con altri Crostacei cioè: col *Pandalus Pristis*, col *Pandalus narval*, abbondantissimi nel nostro mare. Abita in mezzo al fango alla profondità di 100-300 m. circa.

La sua frequenza, in rapporto alle profondità in cui fu rin-

venuto questo Crostaceo, induce a credere che la distribuzione batimetrica di esso varii da 508 m. a 300.

— I caratteri di questa specie hanno dato luogo a discussioni, riportate nel lavoro del Senna.

Secondo alcuni, il rostro sarebbe lungo tanto da sorpassare di molto gli occhi e da raggiungere o superare lo scafocerite, ed i maschi a parità di dimensioni colle femmine l'avrebbero notevolmente più corto. Questi dati sono confermati dalle mie osservazioni; però nei numerosi esemplari di maschi il rostro raggiunge lo scafocerite senza superarlo mai, nei maschi il rostro è di poco più corto, e il numero dei denti, che il Carus crede da 5-6 e il Senna da 8-9, nei miei esemplari è da 7-8.

Il maschio è costantemente più piccolo della femmina.

Fam. PENAEIDAE — Sp. Bate.

Sottofam. *Parapenaeinae* — Ortm.

3. Penaeus siphonocerus — Phil.

È scarsissimo, forse perchè abitualmente vive a grande profondità.

Gli esemplari in collezione mi sono pervenuti dalla baia di Catania e sono stati presi colle nasse.

— Il rostro nel margine inferiore è munito di numerosi peli, e nel superiore porta costantemente sei denti, il primo dei quali è più distanziato, il secondo più robusto degli altri.

Questi caratteri contraddicono evidentemente le osservazioni del *Carus*, secondo cui i denti del margine superiore sarebbero sette e tra l'uno e l'altro numerosi peli.

La squama antennale è lunga quanto lo scafocerite. Il solco cervicale molto accentuato è terminato ai due lati con due spine di cui la superiore più robusta.

Il I. somite dell'addome è più stretto degli altri e forma una specie di collaretto; gli ultimi tre sono carenati; il IV lo è per metà, mentre il VI porta nel suo margine anteriore una spina sottile.

Il telson, appuntito e fortemente solcato longitudinalmente, porta in vicinanza del suo margine anteriore una sottilissima spina per ogni lato. La branca esterna ed interna dell'uropodo termina ai margini con numerosi peli simili alle barbe delle penne degli uccelli.

Fam. Penaeidae — Sp. Bate

Sottofam. *Pasiphaeinae* (Dana) Cls.

4. Pasiphea Sivado — Risso

Da notizie attinte da alcuni pescatori, mi risulta che questo crostaceo si pesca colle nasse, alla profondità non superiore a 200 m. Credo probabile però, che si peschi a profondità minori, senza escludere la possibilità di una cattura superficiale.

Infatti lo *Smith*, come ha rilevato il *Riggio*, considera le specie del genere *Pasiphea* come essenzialmente nuotatrici e non rigorosamente abissali.

Gli esemplari in collezione mi sono pervenuti dalla baia di Catania e sono stati catturati dentro le nasse.

— Ha il corpo fortemente compresso, il cefalo torace non carenato nella sua porzione anteriore, che si va gradatamente allargando sino alla posteriore. Il margine frontale del cefalo-torace è libero, gli occhi sono brevi e peduncolati.

Lo stipite antennulare è composto di tre articoli, che presi insieme sono lunghi meno di $^1/_3$ del cefalo-torace. Il I. di tali articoli è lungo quanto gli altri due, ed incavato nel mezzo, dove raccoglie gli occhi; il più corto è l'articolo mediano.

Lo stipite porta le antennule, il filamento esterno delle quali è più forte dell'interno e della lunghezza quasi del cefalo torace.

La squama antennale stretta, quasi lanceolata supera in lunghezza lo scafocerite.

Il peduncolo antennale è lungo e diviso in tre articoli, dei quali è più sviluppato il I. superiore.

Il I. paio di pereiopodi ha dita lunghe una metà del metacarpo.

Il I. paio, il più sviluppato, ha dita sottili e di poco più lunghe del metacarpo. Le tre paia rimanenti cioè III, IV, e V. sono le più gracili e le meno lunghe.

I pleopodi sono molto bene sviluppati.

Il VI. somite, che è più lungo degli altri, è munito di una spina sottile al margine anteriore.

Il telson è breve.

L'animale è di color bianco cartilagineo.

Fam. PENAEIDAE — Sp. Bate

Sottofam. *Crangonidae* — Dana

5. Lismata seticaudata — Risso

È abbastanza raro, si pesca colle nasse alla profondità di 200 m. circa.

Gli esemplari in collezione sono stati catturati nella baia di Catania.

Fam. PENAEIDAE — Sp. Bate

Sottofam. *Aristeinae* — Alcock

6. Aristeus antennatus — Risso

È scarsissimo, e si pesca colle nasse, che vengono messe alla profondità di 150 m. circa, per la cattura dei gamberi.

La scarsezza di questo crostaceo e il non trovarsi in tutte le stagioni, non lascia alcun dubbio che il suo *habitat* sia abissale, come è confermato dal *Senna* che l'ha trovato alla profondità di 800-1005 m.

Per tali ragioni bisogna ammettere che la sua comparsa nel mercato di *Catania* sia dovuta ad una entrata accidentale nelle nasse da pesca.

Gli esemplari in collezione mi sono pervenuti dalla baia di *Augusta* e sono stati catturati colle nasse.

— L'animale ha il rostro che supera di molto lo stipite delle antennule ed è munito alla base di tre denti robusti.

I tergidi dei tre ultimi segmenti pleonali sono carenati, il terzo è carenato solo per metà; e tutti sono terminati dalla parte inferiore da un dente, contro l'opinione del *Carus*, il quale ritiene che in questa specie il rostro superi di poco lo stipite delle antennule e che porti alla base cinque denti robusti e che solo il IV e il V somite dell'addome sono carenati, mancanti però di denti ai margini inferiori.

Il I. paio dei piedi mascellari è cosparso di peli e molto sviluppato nei due sessi.

La femmina costantemente è più robusta del maschio.

Fam. PENAEIDAE — Sp. Bate

Sottofam. *Aristeinae* — Alcock

7. Aristeomorpha pholiacea — Risso

Questo crostaceo nelle osservazioni del *Senna* è riportato alla profondità di 760-823 m. Secondo le mie osservazioni esso vive a 200 m. circa.

La frequenza con cui questa specie si rinviene nel Compartimento marittimo di Catania, fa credere che la sua distribuzione batimetrica sia molto variabile.

Gli esemplari in collezione mi sono pervenuti dalla baia di Augusta, però se ne trovano anche nella baia di Catania.

— Il rostro è diversamente lungo nei due sessi; infatti, nella femmina supera di molto lo stipite delle antennule ed è alquanto curvo all'ingiù verso la base mentre in seguito è ascendente, convesso e carenato, ed alla punta gracile e assottigliato.

La cresta nella porzione frontale è provvista di cinque denti bene sviluppati ed acuti con numerosi peli tra un dente e l'altro. Il resto del rostro porta da due a cinque denti molto meno sviluppati di quelli della cresta e più distanti. perciò il numero totale di essi può ascendere ad undici, ma per lo più è minore, rimanendo però costanti i denti della cresta frontale.

Il margine inferiore del rostro è liscio, cosparso di peli solo alla base.

Il rostro nel maschio è molto più corto e raggiunge appena la lunghezza della cresta di quello della femmina; è convesso, carenato e munito di cinque denti tra i quali sono dei peli come nella femmina.

Lo scudo nell' *Aristeomorpha pholiacea* è lievemente carenato sulla linea dorsale della regione gastrica.

La regione branchiale è bene indicata da una cresta.

Il dorso del III. somite non è carenato, è carenato invece il IV e il V somite e il VI in cui si distinguono tre carene.

Il colore dell'animale è rosso intenso, gli occhi sono di colore azzurro carico.

REPTANTIA

Euryonidea — De Haan

Fam. Euryonidae — Dana

8. Polycheles typhlops — Heller

Questo crostaceo è scarsissimo nel Compartimento marittimo di Catania, e pare che sia una forma esclusivamente abissale. perchè solo qualche esemplare viene ad impigliarsi casualmente nelle nasse dei gamberi.

Gli esemplari in collezione mi sono pervenuti dalla baia di Catania e sono stati catturati colle nasse.

— Il carapazio è leggermente convesso nei due sessi con i margini forti pelosi e dentellati.

Il solco cervicale è molto manifesto, incurvato e lateralmente biforcato.

La linea principale segue l'andamento di una curva e raggiunge il margine esterno presso il suo terzo anteriore, l'altro ramo va orizzontalmente al margine esterno.

Questi due rami limitano due infossature, una più grande inferiore e una molto più piccola superiore e dividono il carapazio in tre regioni: una anteriore cefalica, una posteriore toracica ed una mediana laterale piccola e triangolare.

La superficie della regione cefalica del carapazio è percorsa da tre *creste longitudinali* spinifere caratteristiche, la più sviluppata corre lungo la linea mediana e procede sino al margine posteriore.

Nella parte posteriore ai due lati della cresta mediana, vi sono altre due linee spinifere, che scendono sino al margine posteriore.

Le chele dei primi pereiopodi non differiscono nei due sessi. Nel maschio il V non è chelato e termina con un breve dattilo, nella femmina è una piccola chela a dita alquanto disuguali. Nella femmina il I. pereiopodo è poco più lungo che nel maschio, pure biarticolato, ma di forma diversa. Il maschio è costantemente più piccolo della femmina.

EUCIPIDEA

Fam. ACANTHEPHYRIDAE (Bate) — Ortm.

Sottofam. *Acanthephyrinae*—Ortm.

9. Acanthephira pulchra A. M. Edwards

Questa specie fu pescata a 1650 m. da *S. A. il Principe di Monaco* colle nasse al largo di Monaco, e dal *Giglioli* nella Campagna Talassografica del Washington, col *gangano* alla profondità di 2188 a 2390 m.

Da noi tale specie è scarsissima e si pesca alla profondità di 200 m. circa nella baia di Augusta colle nasse.

— Le *Acanthephirinae* sono animali essenzialmente abissali, perciò si deve credere o che qualche individuo occasionalmente risalga a profondità minori, o che venga quivi trasportato da correnti marine.

Il Riggio però sostiene che, pur vivendo normalmente a grandi profondità, abbia una distribuzione batimetrica che nel Mediterraneo varia entro limiti assai estesi, da 200 a 2690 m.

Milne Edwards ha descritto assai brevemente questa specie che crede somigliante alla A. armata delle Antille, dalla quale si distingue per l'armatura del rostro, di cui il dente anteriore è separato dagli altri da un intervallo maggiore di quello esistente fra i cinque denti seguenti, e nella parte inferiore è guarnito di denti posti ad intervalli irregolari.

Il Riggio ha descritto questo crostaceo, e ci ha dato anche la figura. Il Senna però non crede esatta nè la descrizione nè la figura.

Dalle osservazioni degli autori messe in rapporto colle mie rilevo che il *Riggio* ha esaminato esemplari femmine mentre il *Senna* esemplari maschi, perciò le discrepanze e le pretese inesattezze sono probabilmente dovute a differenze sessuali.

Infatti, nella femmina il rostro è un pò più lungo di quello del maschio, come si osserva nella figura del Riggio.

Posso aggiungere anche che l'ultimo dente del margine superiore nel maschio è più distanziato che nella femmina, che i denti del margine inferiore del rostro sono quattro in tutti e due i sessi, ma nel maschio sono disposti in due coppie, cioè due alla base e due in alto: quelli della base sono più distanziati di quelli che si trovano in alto, come ben si osserva nella figura del Senna.

Nella femmina invece i primi tre denti del margine inferiore sono ugualmente distanziati e solo il quarto è meno distante dagli altri, come si osserva nella figura del *Riggio*.

Il *Senna* dice che costantemente il III. somite sia carenato nei $^2/_3$ posteriori; ma nei miei esemplari l'ho riscontrato completamente carenato. L'animale è di color rosso intenso, cogli occhi di colore azzurro.

Fam. PANDALIDAE (Bate) — Ortm

Sottofam. *Pandalinae* — Ortm

10. Pandalus narwal — M. Edwards

Per la sua frequenza nel Compartimento marittimo di Catania credo che esso non debba ritenersi come una forma esclusivamente abissale.

Il *Senna* nelle sue osservazioni l'ha trovato alla profondità di 350 m.; io l'ho trovato alla massima profondità di 140 m. circa.

Gli esemplari in collezione mi sono pervenuti dalla baia di Catania e furono catturati dentro le nasse.

— Il numero dei denti superiori del rostro che il *Carus* enumera da 20 a 24 nei miei esemplari è sempre superiore a 30 e giunge anche a 38.

I denti della base del rostro, che sono i più sviluppati, sono generalmente in numero di quattro e talvolta cinque.

Il *telson* porta ai margini laterali sei spine sottili e termina con tre spine di cui le due esterne sono più robuste dell'interna. Tra questa e le spine esterne si trovano dei peli.

Il III. somite caratteristico, arcuato nel margine inferiore, termina con una punta.

Le due spine esterne del *telson* portano alla base altre due piccole spine.

Fam. PANDALIDAE (Bate) — Ortm

Sottofam. *Pandalinae* — Ortm

11. Pandalus heterocarpus — Costa

Per la sua grande rarità nel Compartimento marittimo di Catania questo crostaceo pare debba riferirsi alla fauna abissale, e che quindi accidentalmente sia capitato nelle nasse dei gam-

beri. Esso fu descritto dal prof. *Achille Costa* che lo chiamò *Heterocarpus* per la conformazione delle sue zampe.

Per un certo tempo si credette una forma propria del golfo di Napoli, ma il *Riggio* nel febbraio del 1894 lo rinvenne insieme con alcuni crostacei provenienti dalla baia di Augusta. In seguito fu riscontrato anche dal Senna nel Mediterraneo.

Io l' ho trovato nella baia di Catania nell' inverno dello scorso anno, alla profondità di 150-400 m. circa.

Gli esemplari in collezione sono stati tutti catturati colle nasse.

— Rostro lungo e gracile provvisto di denti sottilissimi, che variano nei diversi individui, però il numero di quelli del margine inferiore è sempre maggiore di quelli del margine superiore.

Placca laterale del III. somite arrotondata.

Lo scafocerite è più corto dello scudo.

Il I. paio di pereiopodi non raggiunge il massillipede esterno che è provvisto di peli.

Fam. NIKIDAE Sp. Bate (Processidae — Ortm)

12. Nica edulis — Risso

La scarsezza di questo crostaceo nel Compartimento marittimo di Catania, e il rinvenirsi solo dopo che il mare è stato molto agitato, non ci lascia alcun dubbio che esso debba riferirsi alla *fauna abissale.*

Gli esemplari in collezione furono catturati a 200 m. circa colle nasse nella baia di Catania.

GALATHEIDEA HENDERSON

Fam. GALATHEIDAE — Henderson

Sottofam. *Galatheinae* — M. Edw. e Bouv

13. Galathea strigosa — Linneus

È scarso nel Compartimento marittimo di Catania. Tutti gli esemplari sono stati pescati colle nasse alla profondità di 200 metri circa nella baia di Aci Trezza.

Nella mia collezione si trovano cinque esemplari di Galathea che per molti caratteri pare debbano riferirsi ad altre due specie diverse.

Mi propongo quindi farne uno studio speciale.

Fam. Galatheidae — Henderson

Sottofam. *Galatheinae* — M. Edw. e Bouv.

14. Munida bamffica (Pennant)

La distribuzione batimetrica di questo crostaceo varia da 940 m. (Senna) a 100 m., alla quale profondità l' ho trovato spesso nella baia di *Aci Trezza*, da dove provengono tutti gli esemplari in collezione.

— Lo stipite delle antenne triarticolato raggiunge appena gli occhi. Il I. articolo porta due spine bene sviluppate al suo margine anteriore, il II. una spina dal lato sinistro, il III. una spina gracile dal lato destro.

Il filamento antennale è lungo per tre volte l'animale e pluriarticolato, munito ai margini laterali di sottilissimi peli.

Lo stipite delle antennule è formato di un solo articolo, che in basso porta due spine, di cui la superiore più sviluppata della inferiore, il margine anteriore porta pure due spine di cui l'interna è molto più sviluppata dell'esterna, l' antenna è biarticolata e terminata con un breve fiocco. Il I. paio di pereiopodi sono molto sviluppati e arrotondati; le dita della mano ugualmente sviluppate terminano l'esterno con due unghia, bianche cornee appuntite, l'interno con un' unghia pure appuntita.

Il V. paio di pereiopodi sono gracili, corti e terminano in una piccola chela tra un ciuffo di peli dorati.

Il I., II. e III. portano numerosi e brevi peli sul margine anteriore.

Il II. somite è munito di sei spine, le prime quattro disposte due per lato ugualmente distanziate e le due rimanenti mediane più distanziate delle altre; il III. somite porta quattro spine, una per lato corrispondente longitudinalmente all'interno delle due del somite superiore e due mediane corrispondenti alle due mediane del somite superiore.

Le branche dell' uropodo terminano al margine esterno con numerosi peli biondi.

NEPHROPSIDEA — Ortmann

Fam. NEPHROPSIDAE—Leach.

15. Nephrops norvegicus — Linneus

Secondo le osservazioni del Senna, questo crostaceo fu pescato alla profondità di 823 m. col *gangano.*

I miei esemplari furono pescati colle nasse alla profondità di 300 m. circa, nel Gennaio dello scorso anno.

Essi provengono tutti da *Aci Trezza.*

— L'animale è di color bianco osseo lucente, e solo il carpo e le dita delle grosse chele del I. paio di pereiopodi sono chiazzati in rosso mattone. Il carapazio, il telson e i pleopodi sono bianchi ed hanno quasi l'aspetto di vetro smerigliato.

BRACHIURA

NOTOPODA

Fam. INACHIDAE — Miers

Sottofam. *Leptopodinae* — Miers

16. Stenorhyncus phalangium — M. Edw.

Si trova in quella porzione di mare che da Catania va alla baia di Aci Trezza, insieme con altre specie del genere *Inacus*, che vengono dai pescatori volgarmente chiamati *Tarantuli di mari.*

Il dott. S. Lo Bianco nelle sue osservazioni riferisce di aver pescato una *Megalopa di Stenorhyncus phalangium* alla profondità di 1500 m.

Da noi tale specie si cattura in discreta quantità alla profondità di 300 m. circa.

Gli esemplari in collezione mi sono pervenuti dalla baia di Catania e sono stati catturati colle nasse.

Fam. GONOPLACIDAE — M. Edw.

17. Gonoplax rhomboides — Desm.

È abbondante nella baia di Aci Trezza, dove si pesca solo d'inverno colle nasse alla profondità di 200 m.

— Nel maschio il metacarpo del I. pereiopodo è quasi il doppio della lunghezza delle dita, nella femmina il metacarpo e le dita sono quasi uguali.

Il dito esterno nel maschio presenta costantemente una macchia nera.

Nella femmina i I. pereiopodi sono disuguali, il sinistro più lungo del destro, le mani un poco appiattite e le dita della lunghezza del metacarpo.

L'addome nella femmina è largo e i primi due somiti più larghi degli altri.

Nella mia collezione si trovano due esemplari un maschio e una femmina molto affini al G. rhomboides — ma se ne distinguono per il fatto, che il maschio ha i I. pereiopodi poco più lunghi di quelli della femmina, il sinistro è un poco più lungo del destro e con la mano più stretta della destra, e che nella femmina il I. pereiopodo sinistro è più piccolo del destro.

Occorrerebbe quindi esaminare se si tratti di specie diversa o nuova.

Gli esemplari in collezione mi sono pervenuti dalla baia di Aci Trezza.

INDICE BIBLIOGRAFICO

1. GIGLIOLI E. H. — *Un nuovo mondo — Gli abitanti degli abissi oceanici ed il viaggio del Challenger intorno al globo in:* Nuova Antologia, Firenze 1877; e Nuova Antologia, fasc. XVI. Roma 1878.

2. GIGLIOLI E. H. — *La scoperta di una fauna abissale nel Mediterraneo,* in Atti del III. Congresso Geografico Internazionale, vol. II. Venezia, 1881.

3. SENNA A. — *Le esplorazioni abissali nel Mediterraneo del R. piroscafo Washington nel 1881 — I^a nota sugli Oxicefalidi in:* Bull. Soc. Ent. Ital. an. XXXIV, 1902.

4. SENNA A. — *Le esplorazioni abissali nel Mediterraneo del R. piroscafo Washington nel 1881 — II^a nota sui crostacei decapodi in:* Bull. Soc. Ent. Ital. an. XXXIV, 1902.

5. S. LO BIANCO — *Le pesche pelagiche abissali eseguite dal* MAIA *nelle vicinanze di Capri.* Abdruck aus den Mittheilungen aus der Zoologischen Station zu Neapel 15 Band 3 Heft. 1901.

6. S. A. S. — *Le Prince Albert I.^{er} de Monaco in:* Bulletin du Muséum di Histoire naturelle. Paris, 1900.

7. IULES RICHARD — *Les campagnes scientifiques de S. A. S. le Prince Albert I.^{er} de Monaco:* imprimerie de Monaco, 1900.

8. G. CANO — *Viaggio della R. Corvetta Vittor Pisani attorno al globo*—Crostacei brachiuri e anomuri, 1889.

9. M. GABRIEL DESBATS — *Ocèanographie dans le Golfe de Guascogne, en Galice et en Portugal* — Bordeaux, 1902.

10. CARUS V. I. — *Produmus Faunae Mediterraneae*—Vol. I. Stuttgart, 1884 p. 470-524.

11. MILNE EDWARDS — *Crustacès t. I., II., III.* — Paris, 1834-37-40.

12. COCCO A. — *Descrizione di alcuni Crostacei di Messina in:* Giornale di Scienze, lettere ed arti per la Sicilia tom. XLIV an. XI. Palermo 1833.

13. FABRICIUS I. CH. — *Entomologiae Systematicae* — Supplementum, 1794 p. 307-418.

14. IEANNETTE POWER — *Itinerario della Sicilia, riguardante tutti i rami di storia naturale* — Catalogo dei crostacei p. 15-16, Messina.
15. MONTICELLI F. S. e LO BIANCO S. — *Comunicazioni sui Penaeidi del golfo di Napoli* — Monitore Zool. Ital. XII., n. 7, 1901.
16. MONTICELLI F. S. e LO BIANCO S. — *Sullo sviluppo dei Penaeidi del Golfo di Napoli* — Monitore Zool. Ital. XI., supplemento, 1900.
17. RIGGIO G. — *Sul rinvenimento di nuovi crostacei macruri nei mari di Sicilia in:* Il Naturalista Siciliano an. XIV p. 244, 1895; e an. I. nuova serie n. 1-3. 1896.
18. RIGGIO G. — *Appunti di Carcinologia Siciliana — Sul Polycheles Doderleini. Riggio ex Heller*, in Naturalista Siciliano anno IV., p. 99, 1884-85.
19. MILNE EDWARDS — *Diagnose d'un Crustacè Macroure nouveau de la Mediterranée in:* Bull. de la Société Zoologique de France année 1890 p. 165. Paris.
20. P. PAVESI — *Intorno all' esistenza della Fauna pelagica o d' alto Lago in Italia — Lettera del prof. P. Pavesi al dott. G. Cavanna in:* Bull. della soc. entomol. Ital. 1877, vol. IX, p. 293.

Formole d'incidenza per le coppie: « punto e retta, retta e piano punto e piano » nello spazio da n dimensioni.

Memoria del D.r NICOLÒ GIAMPAGLIA

Secondo la denominazione di H. Schubert due spazî lineari, di diversa dimensione, che si appartengono diconsi *incidenti* e per *formola d' incidenza* relativa a due spazî s'intende ogni relazione intercedente fra varie condizioni fondamentali a cui può essere assoggettato il sistema di due spazî incidenti (*). Di formole d' incidenza nello spazio ordinario tratta lo Schubert nel Cap. II del suo libro « Kalkül der abzählenden Geometrie » e prima che egli in una sua recente memoria avesse assegnato in uno spazio ad n dimensioni la formola fondamentale d' incidenza

---

(*) Tolgo dalle memorie dello Schubert le segnenti notazioni e definizioni:

« Il simbolo $[a]$ rappresenta uno spazio lineare di punti ad a dimensioni giacente nello spazio ambiente $[n]$ ad n dimensioni $(a \leq n)$ ».

« Dati $k+1$. spazi $[a_0]$, $[a_1]$, ... $[a_{k-1}]$, $[a_k]$, con $0 \leq a_0 < a_1 < a_2$ .... $< a_{k-1} < a_k \leq n$, tali che $[a_0]$ giaccia in $[a_1]$, $[a_1]$ in $[a_2]$, ... $[a_{k-1}]$ in $[a_k]$, il simbolo $[a_0\ a_1\ a_2]$, ... $[a_k]$ rappresenta il sistema di tutti gli spazi $(k]$ che hanno a comune con $[a_0]$ un punto, con $[a_1]$ una retta, con $[a_2]$ un piano, ... con $[a_{k-1}]$ un $[n-1]$ e giacciono in $[a_k]$. Un tal sistema prende il nome di *forma fondamentale* di spazi $[k]$ ».

« Si dice che ad un $[k]$ di $[n]$ si impone una *condizione fondamentale* se si vuole che esso appartenga ad una data forma fondamentale $[a_0, a_1, \ldots.\, a_k]$ di spazi $[k]$; tale condizione si denota col simbolo $(a_0, a_1, \ldots.\, a_k)$ e il suo peso, o dimensione, è uguale a: $(k+1)n - \frac{1}{2}k(k+1) - (a_0 + a_1 \ldots. + a_k)$ ».

Analogamente si dice che al sistema di due spazî incidendi $[k]$ ed $[r]$, $k \gtrless r$ si impone una condizione fondamentale quando si vuole che sia soddisfatta contemporaneamente ciascuna di due date condizioni fondamentali $(a_0, a_1, \ldots.\, a_k)$, $(h_0, h_1, \ldots.\, h_r)$ imposte rispettivamente ai due spazi; una tal condizione si denota col simbolo $(a_0, a_1, \ldots.\, a_k)$ $(h_0, h_1, \ldots.\, h_r)$ e il suo peso è uguale alla somma dei pesi delle condizioni componenti ».

« I termini di una formola di incidenza sono dello stesso peso e questo numero vien detto peso della formola stessa ».

per il sistema di due spazî incidenti di qualunque dimensione (*), aveva trovato una formola di tal natura relativa però all'incidenza di un punto e una retta (**), formola che veniva in seguito notevolmente generalizzata dal prof. Pieri (***).

Nella presente nota ci proponiamo di ricercare in un $[n]$ formole d'incidenza più generali delle fondamentali relative alle incidenze di un punto e una retta, di una retta e un piano, di un punto e un piano, e di assegnare, per ciascuna delle due prime di queste incidenze, la formola d'incidenza più generale possibile, cioè quella contenente una condizione del tutto arbitraria inerente all'incidenza che si considera. — Ci proponiamo inoltre di applicare la più generale formola d'incidenza per il punto e la retta alla formola fondamentale di coincidenza (****) per la coppia di punti allo scopo di trovare formole di coincidenza, per coppie di punti, di maggiore dimensione di quelle finora note. In questa ricerca faremo uso della formola di risoluzione per il prodotto di due condizioni fondamentali inerenti alla retta o al piano tutte le volte che si tratterà di sostituire a quel prodotto la somma di più condizioni semplici (*****).

(*) V. Ueber die Incidenz zweier linearer Raüme beliebiger dimensionen. (Math. Ann. Bd. LVIII. Heft. 3, 1903, form. 13). Questa formola abbraccia, come casi particolari, le formole $\alpha\binom{1,0}{2,0}$, $\alpha\binom{1,0}{2,1}$, $\beta\binom{2,0}{1,0}$, contenute nella presente nota (N. N. 5,14), le quali però erano state da me trovate prima della pubblicazione della memoria dello Schubert.

(**) V. Vielfache tangenten in Raüme beliebiger dimensionen.—Maht Ann. Bd. XXVI, § 1.

(***) V. Formole di coincidenza per le serie algebriche ∞^n, delle coppie di punti dello spazio ad n dimensioni — Rend. del Circolo Mat. di Palermo t. 5° § 2° 1891.

(****) Nel considerare la coppia di spazi di ugual dimensione ma indipendenti di posizione ha grande importanza la condizione che i due spazî della coppia siano infinitamente vicini. Questa condizione, come pure ogni condizione, inerente alla coppia, composta con essa, dicesi *condizione di coincidenza* per la coppia di spazî. Una relazione intercedente fra condizioni di coincidenza e condizioni fondamentali inerenti alla coppia dicesi *formola di coincidenza* relativa alla coppia di spazî.

(*****) Per la risoluzione del prodotto di due condizioni fondamentali inerenti alla retta sarà adoperata la formola seguente:

$$\theta). \quad (a_0, a_1)(b_0, b_1) \sum_{\alpha=0}^{\alpha=h} (a_0 + b_0 - n + 1 + \alpha,\ a_1 + b_1 - n - \alpha),$$

dove h è il minore dei numeri $a_1 - a_0 - 1$, $b_1 - b_0 - 1$, e dove bisogna ritenere nulli i simboli nei quali risulta $a_0 + b_0 - n + 1 + \alpha < 0$. (Cfr. la nota di F. Palatini ed G. Zeno Giam-

Una tal ricerca non appar priva d' importanza quando si pensi che una formola di incidenza, o di coincidenza, opportunamente interpretata per ciò che concerne una varietà algebrica, o un sistema di varietà, può esprimere una relazione fra i caratteri di quella varietà, o di quel sistema.

§ 1.

Formole d' incidenza per il punto e la retta.

1. Relativamente al sistema di un punto e una retta incidenti, dopo le due note formole d' incidenza:

$$1) \qquad (a,\ n)\,(n-1) = (a) + (a,\ n-1)\,; \qquad a < n-1 \qquad (*)$$

$$2) \qquad (a,\ n)\,(n-l) = (n-l, n)\,(a) + (a,\ n-l)\,; \quad a < n-l-1 \qquad (**)$$

resta soltanto a conoscere la formola d' incidenza più generale possibile la quale si può ottenere nel modo seguente:

Applichiamo la 2) per un $[n\text{-}k]$ di $[n]$ e segniamo con sbarre due spazî che s' appartengono (***), si avrà:

$$2)' \qquad (a,\ \overline{n\text{-}k})\,(\overline{n\text{-}l\text{-}k}) = (n\text{-}l\text{-}k,\ \overline{n\text{-}k})\,(\overline{a}) + (a,\ n\text{-}l\text{-}k)\,; \qquad a < n\text{-}l\text{-}k-1.$$

---

belli « Prodotto di due condizioni caratteristiche relative ai piani di un iperspazio » Acc. Reale delle Scienze di Torino. Anno 1900-901.

Nel caso del prodotto di due condizioni relative al piano verrà adoperata invece quest' altra formola:

$$7). \quad (a_0,\ a_1,\ a_2)\,(k,\ a_2-1,\ a_2) = \Sigma_i\ (i_0-1,\ a_0+i_1,\ a_1+i_2).$$

dove la somma va estesa a tutti i valori delle tre variabili i per cui: $1 \leq i_0 \leq a_0+1$; $1 \leq i_1 \leq a_1 - a_0$; $1 \leq i_2 \leq a_2 - a_1$ ed: $i_0 + i_1 - i_2 = k+3$. (Cfr. M. Pieri « Sul problema degli spazi secanti » Nota 1ª form. $\alpha_{s,k}$) per $s=2$. — Rend. del R. Ist. Lomb. Serie II Vol. XXVI Fasc. 14.

(*) H. Schubert — Vielfache tangenten . . . . . .

(**) M. Pieri — Formole di coincidenza . . . . . .

(***) Questa notazione sarà sempre adoperata in seguito per indicare che due spazi si appartengono.

D' altra parte la 2) stessa, posto k in luogo di l ed n-l-k in luogo di a, diventa :

$$(n-l-k,\, n)\,(n-k) = (n-k,\, n)\,(n-l-k) + (n-l-k,\, n-k)$$

ossia, moltiplicando simbolicamente per $(a+k)$:

$$(n-l-k,\, n)\,(n-k)\,(a+k) = (n-k,\, n)\,(n-l-k)\,(a+k) + (n-l-k,\, n-k)\,(a+k)\,,$$

ma :

$$(n-k)\,(a+k) = (a)\,; \quad (n-l-k)\,(a+k) = (a-l)\,; \quad (n-l-k,\, n-k)\,(a+k) = (n-l-k,\, \overline{n-k})\,(\overline{a}),$$

quindi :

$$(n-l-k,\, n)\,(a) = (n-k,\, n)\,(a-l) + (n-l-k,\, \overline{n-k})\,(\overline{a}) \tag{2)''}$$

Dal confronto della 2)′ con la 2)″ risulta :

$$(a,\, \overline{n-k})\,(\overline{n-l-k}) = (n-l-k,\, n)\,(a) + (a,\, n-l-k) - (n-k,\, n)\,(a-l)\,; \quad a < n-l-k+1$$

e notando infine che :

$$(a,\, \overline{n-k})\,(\overline{n-l-k}) = (a,\, n-k)\,(n-l)\,.$$

si ha la formola cercata, cioè :

$$(a,\, n-k)\,(n-l) = (n-l-k,\, n)\,(a) + (a,\, n-l-k) - (n-k,\, n)\,(a-l)\,; \qquad a < n-l-k+1. \tag{3)}$$

dove la condizione $(a,\, n$-$k)$ $(n$-$l)$ relativa al sistema del punto e la retta incidenti è affatto arbitraria.

La 3) può anche scriversi così :

$$(a,\, n-k)\,(n-l) = (a,\, n)\,(n-k-l) - (n-k,\, n)\,(a-l)\,, \tag{3)′}$$

giacchè, se nella 2) si pone n-l-k in luogo di n-l, si ha :

$$(a,\, n)\,(n-l-k) = (n-l-k,\, n)\,(a) + (a,\, n-l-k).$$

La dimensione della 3) è uguale a : $n - a + l + k - 1$; per $a = 0$ e per tutte le coppie di valori di l e k per cui $l + k = n$,

sarà $n - a + l + k - 1 = 2n - 1$, cioè in tal caso la dimensione della 3) uguaglia il numero delle costanti del sistema punto — retta incidenti e quindi avranno luogo le seguenti egualianze :

$$(0.1)(n\text{-}1) = (0.n)(n\text{-}2) = \ldots\ldots = (0.n\text{-}1)(1) = (0.n)(0) = 1.$$

ossia :

$$(0,\overline{1})(\overline{0}) = (0.\overline{2})(\overline{0}) = \ldots\ldots = (0.\overline{n\text{-}1})(0) = (0,n)(0) = 1.$$

§ II.

Formole di coincidenza per la coppia di punti.

2. La formola fondamentale di coincidenza per la coppia di punti (P, P') è la seguente :

$$\rho)\qquad \varepsilon = (n\text{-}1) + (n\text{-}1)' - (n\text{-}2.\,n), \qquad (*)$$

dove ε denota la condizione che i due punti della coppia siano infinitamente vicini. — Essa è di prima dimensione e però riferita ad una data serie ∞^1 di coppie (P, P') esprime che « il numero di quelle coppie i cui punti sono infinitamente vicini è uguale al numero di quelle coppie che hanno il loro punto P in un dato $[n\text{-}1]$, aumentato dal numero di quelle altre che hanno il loro punto P' nel dato $[n\text{-}1]$, meno il numero di quelle coppie per le quali la congiungente i due punti incontra un dato $[n\text{-}2]$».

Moltiplicando sibolicamente la ρ) per $(a, n\text{-}a)$ si ottiene :

$$\varepsilon(a.\,n\text{-}a) = (a.\,n\text{-}a)(n\text{-}1) + (a,\,n\text{-}a)(n\text{-}1)' - (a,n\text{-}a)(n\text{-}2,\,n),$$

ma la 3) del § I per $k = a$, $l = 1$, ci dà :

$$\left.\begin{aligned}(a,\ n\text{-}a)(n\text{-}1) &= (n\text{-}a\text{-}1,n)(a) + (a,\,n\text{-}a\text{-}1) - (n\text{-}a,\,n)(a\text{-}2)\\ (a,\ n\text{-}a)(n\text{-}1)' &= (n\text{-}a\text{-}1,n)(a)' + (a,\,n\text{-}a\text{-}1) - (n\text{-}a,\,n)(a\text{-}1)'\end{aligned}\right\} a < n - a$$

(*) V. H. Schubert — Vielfache tangenten....

mentre, per la formola di risoluzione 6), è:

$$(a, n\text{-}a)(n\text{-}2, n) = (a, n\text{-}a\text{-}1) + (a\text{-}1, n\text{-}a).$$

quindi, sostituendo e riducendo, si ha:

$$\varepsilon(a, n\text{-}a) = (n\text{-}a\text{-}1, n)(a) + (n\text{-}a\text{-}1, n)(a)' - (n\text{-}a, n)(a\text{-}1) - (n\text{-}a, n)(a\text{-}1)'$$

$$+ (a, n\text{-}a\text{-}1) - (a\text{-}1, n\text{-}a); \qquad 2a < n.$$

Nella stessa guisa si perviene alle eguaglianze:

$$\varepsilon(a\text{-}1, n\text{-}a+1) = (n\text{-}a, n)(a\text{-}1) + (n\text{-}a, n)(a\text{-}1)' - (n\text{-}a+1, n)(a\text{-}2) -$$

$$- (n\text{-}a+1, n)(a\text{-}2)' + (a\text{-}1, n\text{-}a) - (a\text{-}2, n\text{-}a+1);$$

$$2a\text{-}2 < n.$$

$$\varepsilon(a\text{-}2, n\text{-}a+2) = (n\text{-}a+1, n)(a\text{-}2) + (n\text{-}a+1, n)(a\text{-}2)' - (n\text{-}a+2, n)(a\text{-}3) -$$

$$- (n\text{-}a+2, n)(a\text{-}3)' + (a\text{-}2, n\text{-}a+1) - (a\text{-}3, n\text{-}a+2);$$

$$2a\text{-}4 < n.$$

. . . .

$$\varepsilon(1, n\text{-}1) = (n\text{-}2, n)(1) + (n\text{-}2, n)(1)' - (n\text{-}1, n)(0) - (n\text{-}1, n)(0)'$$

$$+ (1, n\text{-}2) - (0, n\text{-}1)$$

$$\varepsilon(0, n) = (n\text{-}1, n)(0) + (n\text{-}1, n)(0)' + (0, n\text{-}1).$$

Queste formole sono tutte dello stesso peso n, da esse, sommando membro a membro e riducendo, si ottiene:

$$\varepsilon(0, n) + \varepsilon(1, n\text{-}1) + \ldots\ldots + \varepsilon(a\text{-}1, n\text{-}a+1) + \varepsilon(a, n\text{-}a) = (n\text{-}a\text{-}1, n)(a) +$$

$$+ (n\text{-}a\text{-}1, n)(a)' + (a, n\text{-}a\text{-}1); \qquad 2a < n.$$

si ritrova, cioè, per via più diretta e più semplice una nota formola di coincidenza per serie ∞^n di coppie di punti (*).

(*) Cfr. — M. PIERI — Formole di coincidenza . . . . . form. γ'), [illegible].

3. Moltiplicando simbolicamente la φ) per $(a, n\text{-}k)$ si ottiene:

$$\varepsilon(a, n\text{-}k) = (a, n\text{-}k)(n\text{-}1) + (a, n\text{-}k)(n\text{-}1)' - (a, n\text{-}k)(n\text{-}2, n),$$

ma la 3) del § 1, per $l = 1$, ci dà :

$$\left.\begin{array}{l}(a, n\text{-}k)(n\text{-}1) = (n\text{-}k\text{-}1, n)(a) + (a, n\text{-}k\text{-}1) - (n\text{-}k, n)(a\text{-}1)\\ (a, n\text{-}k)(n\text{-}1)' = (n\text{-}h\text{-}1, n)(a)' + (a, n\text{-}k\text{-}1) - (n\text{-}k, n)(a\text{-}1)'\end{array}\right\} a < n\text{-}k.$$

mentre per la formola di risoluzione θ) è :

$$(a, n\text{-}k)(n\text{-}2, n) = (a, n\text{-}k\text{-}1) + (a\text{-}1, n\text{-}k),$$

quindi, sostituendo e riducendo, si ha:

$$\gamma_a) \quad \varepsilon(a, n\text{-}k) = (n\text{-}k\text{-}1, n)(a) - (n\text{-}k, n)(a\text{-}1) + (n\text{-}k\text{-}1, n)(a)' - (n\text{-}k, n)(a\text{-}1)'$$
$$+ (a, n\text{-}k\text{-}1) - (a\text{-}1, n\text{-}k); \qquad a < n\text{-}k$$

Mutando successivamente in questa eguaglianza a e k rispettivamente in a-1, k-1 ; a-2, k-2 ; ..... 0, k-a, si avranno le uguaglianze :

$$\gamma_{a-1}) \quad \varepsilon(a\text{-}1, n\text{-}k + 1) = (n\text{-}k, n)(a\text{-}1) - (n\text{-}k + 1, n)(a\text{-}2) + (n\text{-}k, n)(a\text{-}1)'$$
$$- (n\text{-}k - 1, n)(a\text{-}2)' + (a\text{-}1, n\text{-}k) - (a\text{-}2, n\text{-}k + 1); \qquad a\text{-}1 < n\text{-}k + 1.$$

. . . .

. . . .

$$\gamma_1) \quad \varepsilon(1, n\text{-}k + a\text{-}1) = (n\text{-}k + a\text{-}2, n)(1) - (n\text{-}k + (a\text{-}1, n)(0) + (n\text{-}k + a\text{-}2, n)(1)'$$
$$- (n\text{-}k + a\text{-}1, n)(0)' + (1, n\text{-}k + a\text{-}2) - (0, n\text{-}k + a\text{-}1)$$

$$\gamma_0) \quad \varepsilon(0, n\text{-}k + a) = (n\text{-}k + a\text{-}1, n)(0) + (n\text{-}k + a\text{-}1, n)(0)' + (0, n\text{-}k + a\text{-}1)$$

Sommando le γ) membro a membro e riducendo si ricava :

$$\Gamma). \ \varepsilon(0, n\text{-}a + k) + \varepsilon(1, n\text{-}k + a\text{-}1) + \ldots + \varepsilon(a, n\text{-}k) = (n\text{-}k\text{-}1, n)(a) + (n\text{-}k\text{-}1, n)(a)$$
$$+ (a, n\text{-}k\text{-}1); \qquad a < n\text{-}k.$$

Questa è una nuova formola di coincidenza per serie $\infty^{n+k-a'}$ di coppie di punti.

4. La $\gamma_a)$ del numero precedente si può anche scrivere così :

$$\delta_a) \quad \varepsilon(a, n\text{-}k) = (a, n\text{-}k)(n\text{-}1) + (n\text{-}k\text{-}1, n)(a)' - (n\text{-}k, n)(a\text{-}1)' - (a\text{-}1, n\text{-}k)\,; \quad a < n\text{-}k$$

perchè, in virtù della 3) del § 1, è :

$$(a, n\text{-}k)(n\text{-}1) = (n\text{-}k\text{-}1, n)(a) + (a, n\text{-}k\text{-}1) - (n\text{-}k, n)(a\text{-}1).$$

Moltiplicando la $\rho)$ per $(a + 1, n\text{-}k)(n\text{-}1)$, si ha :

$$\varepsilon(a + 1, n\text{-}k)(n\text{-}1) = (a + 1, n\text{-}k)(n\text{-}2) + (a + 1, n\text{-}k)(n\text{-}1)(n\text{-}1)'$$
$$- (a + 1, n\text{-}k)(n\text{-}2, n)(n\text{-}1),$$

ma, per la 3) del § 1, è :

$$(a + 1, n\text{-}k)(n\text{-}1)' = (n\text{-}k\text{-}1, n)(a + 1)' + (a + 1, n\text{-}k\text{-}1) - (n\text{-}k, n)(a)'$$

e d'altro canto, per la θ), è :

$$(a + 1, n\text{-}k)(n\text{-}2, n) = (a + 1, n\text{-}k + 1) + (a, n\text{-}k),$$

quindi, sostituendo, si ottiene :

$$\delta_{a+1}) \quad \varepsilon(a + 1, n\text{-}k)(n\text{-}1) = (a + 1, n\text{-}k)(n\text{-}2) + (n\text{-}k\text{-}1, n)(a + 1)'(n\text{-}1)$$
$$- (n\text{-}k, n)(a)'(n\text{-}1) - (a, n\text{-}k)(n\text{-}1).$$

In modo analogo si trovano le eguaglianze che seguono :

$$\delta_{a+2}) \quad \varepsilon(a + 2, n\text{-}k)(n\text{-}2) = (a + 2, n\text{-}k)(n\text{-}3) + (n\text{-}k\text{-}1, n)(a + 2)'(n\text{-}2)$$
$$- (n\text{-}k, n)(a + 1)'(n\text{-}2) - (a + 1, n\text{-}k)(n\text{-}2)$$

$$\delta_{a+3}) \quad \varepsilon(a + 3, n\text{-}k)(n\text{-}3) = (a + 3, n\text{-}k)(n\text{-}4) + (n\text{-}k\text{-}1, n)(a + 3)'(n\text{-}3)$$
$$- (n\text{-}k, n)(a + 2)'(n\text{-}3) - (a + 2, n\text{-}k)(n\text{-}3)$$

. . . .

. . . .

$$\delta_{n-k-2}) \quad \varepsilon(n\text{-}k\text{-}2, n\text{-}k)(a + k + 2) = (n\text{-}k\text{-}2, n\text{-}k)(a + k + 1) + (n\text{-}k\text{-}1, n)(n\text{-}k\text{-}2)'(a + k + 2)$$
$$- (n\text{-}k, n)(n\text{-}k\text{-}3)'(a + k + 2) - (n\text{-}k\text{-}3, n\text{-}k)(a + k + 2).$$

$$\delta_{n-k-1}) \quad \varepsilon(n\text{-}k\text{-}1, n\text{-}k)(a + k + 1) = (n\text{-}k\text{-}1, n\text{-}k)(a + k) + (n\text{-}k\text{-}1, n)(n\text{-}k\text{-}1)'(a + k + 1)$$
$$- (n\text{-}k, n)(n\text{-}k\text{-}2)'(a + k + 1) - (n\text{-}k\text{-}2, n\text{-}k)(a + k + 1).$$

Dal sommare membro a membro le $\delta)$ risulta:

$$\Delta). \quad \sum_{i=a}^{i=n-k-1} \varepsilon(i,\, n\text{-}k)\,(n+a\text{-}i) = (n\text{-}k\text{-}1.\, n\text{-}k)\,(a+k) - (a\text{-}1.\, n\text{-}k)$$

$$+\sum_{i=a}^{i=n-k-1} (n\text{-}k\text{-}1.\, n)\,(n+a\text{-}i)\,(i)' - \sum_{i=a}^{i=n-k-1} (n\text{-}k,\, n)\,(n+a\text{-}i)\,(i\text{-}1)'\,; \quad a < n\text{-}k.$$

La $\Delta)$ è ancora una nuova formola di coincidenza, per serie ∞^{n+k-a} di coppie di punti, più generale della $\Gamma)$. Ponendo in essa $k=0$, si ha (*):

$$\Delta)' \quad \sum_{i=a}^{i=n-1} \varepsilon(i.n)(n+a\text{-}i) = -(a\text{-}1.n) + \sum_{i=a}^{i=n} (n+a\text{-}i)\,(i)' = -(a\text{-}1.n) + \sum_{i=a}^{i=n} (i)\,(n+a\text{-}i)'.$$

Dalla $\Delta)'$, ponendo $a=0$, si ricava la formola che esprime il principio di corrispondenza nello spazio punteggiato da n dimensioni, cioè: (**).

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} \varepsilon(i.\, n)\,(n\text{-}i) = \sum_{i=0}^{i=n} (i)\,(n\text{-}i)'\,;$$

ponendo $a=1$, si ottiene l' altra nota formola di coincidenza:

$$\sum_{i=1}^{i=n-1} \varepsilon(i.n)\;(n\text{-}i+1) = -(0,n) + \sum_{i=1}^{i=n} (i)\,(n\text{-}i+1). \qquad (***).$$

§ III.

Formole d' incidenza per il piano e la retta.

5. Il numero delle costanti della coppia, costituita da una retta e un piano incidenti, è: $3n$-4. Il principio di permanenza

(*) Si conviene, una volta per sempre, di attribuire il valore *zero* ad ogni simbolo di condizione, il quale sia privo di senso, vale a dire ad ogni parentesi, gli elementi della quale non soddisfacciano in tutto alle disuguaglianze, di cui in principio della nota di pag. 1.

(**) Cfr. M. Pieri — « Formole di coincidenza . . . . . » N. 2.

(***) Cfr. M. Pieri — Sopra un Problema di Geometria Enumerativa » Giornale di Matematica.

dei numeri ci fornisce le due seguenti relazioni fondamentali fra le condizioni caratteristiche a cui si può assoggettare una tal coppia:

$$\left.\begin{array}{ll}\alpha^{1,0}_{2,0}) & (a, n\text{-}1, n)(n\text{-}2, n) = (a, n) + (a, n\text{-}2, n):\\ \alpha^{1,0}_{2,1}) & (a, n\text{-}1, n)(n\text{-}2, n\text{-}1) = (a, n\text{-}1) + (a, n\text{-}2, n\text{-}1):\end{array}\right\} a < n\text{-}1. \qquad (*)$$

Infatti, se l' $[a]$ della condizione $(a, n\text{-}1, n)$ giace nell' $[n\text{-}2]$ della condizione $(n\text{-}2, n)$, la condizione $(a, n\text{-}1, n)(n\text{-}2, n)$ vien soddisfatta tanto da quelle coppie la cui retta soltanto incontra l'$[a]$, quanto da quelle altre il cui piano incontra l' $[a]$ e taglia l'$[n\text{-}2]$ in una retta; nè potrà esser soddisfatta altrimenti, quindi, essendo tutte e tre le condizioni in parola del medesimo peso, deve sussistere la $\alpha^{1,0}_{2,0}$).

Così pure, se l' $[a]$ della condizione $(a, n\text{-}1, n)$ giace nell' $[n\text{-}1]$ della condizione $(n\text{-}2, n\text{-}1)$, la condizione $(a, n\text{-}1, n)(n\text{-}2, n\text{-}1)$ vien soddisfatta tanto da quelle coppie la cui retta giace nell' $[n\text{-}1]$ e incontra l' $[a]$, quanto da quelle altre il cui piano giace nell' $[n\text{-}1]$ e incontra l' $[a]$; e soltanto in questi due modi, perciò, visto che le sudette tre condizioni sono dello stesso peso, dovrà sussistere la $\alpha^{1,0}_{2,1}$).

6. Dalle due formole precedenti discendono immediatamente le altre due:

$$\left.\begin{array}{ll}\gamma^{2,0}_{2,0}) & (a, n\text{-}2, n)(n\text{-}2, n) = (a, n\text{-}1, n)(n\text{-}3, n) + (a, n\text{-}2, n\text{-}1) - (a\text{-}1, n):\\ \alpha^{2,0}_{2,1}) & (a, n\text{-}2, n)(n\text{-}2, n\text{-}1) = (n\text{-}3, n\text{-}1, n)(a, n\text{-}1) + (a, n\text{-}3, n\text{-}1) - (a\text{-}1, n\text{-}1);\end{array}\right\} a < n\text{-}1.$$

Per ottenere la $\gamma^{2,0}_{2,0}$) moltiplichiamo simbolicamente la $\alpha^{1,0}_{2,0}$) per $(n\text{-}2, n)$, si avrà:

$$(a, n\text{-}1, n)(n\text{-}2, n)(n\text{-}2, n) = (a, n)(n\text{-}2, n) + (a, n\text{-}2, n)(n\text{-}2, n)$$

ma:

$$(n\text{-}2, n)(n\text{-}2, n) = (n\text{-}2, n\text{-}1) + (n\text{-}3, n)$$

$$(a, n)(n\text{-}2, n) = (a, n\text{-}1) + (a\text{-}1, n)$$

(*) Cfr. H. SCHUBERT: — Ueber die Incidenz..... § 2°, formola 1), per $m = 1$, $c = 0,1$.

epperò :

$$(a, n\text{-}1, n)\,(n\text{-}2, n\text{-}1) + (a, n\text{-}1, n)\,(n\text{-}3, n) = (a, n\text{-}1) + (a\text{-}1, n) + (a, n\text{-}2, n)\,(n\text{-}2, n).$$

Questa uguaglianza, sostituendo al termine $(a, n\text{-}1, n)\,(n\text{-}2, n\text{-}1)$ il 2° membro della $\alpha_{2,1}^{1,0})$ e riducendo, si trasforma nella $\gamma_{2,0}^{2,0})$.

Per ottenere la $\alpha_{2,1}^{2,0})$, moltiplichiamo simbolicamente la $\alpha_{2,0}^{1,0})$ per $(n\text{-}2, n\text{-}1)$, la $\alpha_{2,1}^{1,0})$ per $(n\text{-}2, n)$ e uguagliamo i secondi membri risultanti, si avrà :

$$(a, n\text{-}2, n)\,(n\text{-}2, n\text{-}1) = (a, n\text{-}2) + (a, n\text{-}2, n\text{-}1)\,(n\text{-}2, n),$$

cioè, segnando con sbarre due spazii che s' appartengono :

$$(a, n\text{-}2, n)\,(n\text{-}2, n\text{-}1) = (a, n\text{-}2) + (a, n\text{-}2, \overline{n\text{-}1})\,\,(n\text{-}2, \overline{n\text{-}1})\,;$$

ma per la $\alpha_{2,0}^{1,0})$, applicata in un $[n\text{-}1]$ di $[n]$, si ha :

$$(a, n\text{-}2, \overline{n\text{-}1})\,(n\text{-}3, \overline{n\text{-}1}) = (n\text{-}3, n\text{-}2, \overline{n\text{-}1})\,(a, \overline{n\text{-}1}) + (a, n\text{-}3, n\text{-}1),$$

quindi, si può scrivere ancora :

$$p) \qquad (a, n\text{-}2, n)\,(n\text{-}2, n\text{-}1) = (a, n\text{-}2) + (a, n\text{-}3, n\text{-}1) + (n\text{-}3, n\text{-}2, \overline{n\text{-}1})\,\,(a, \overline{n\text{-}1}).$$

La $\alpha_{2,1}^{1,0})$, quando si ponga $a = n\text{-}3$ e tosto si moltiplichi per $(a+1, n)$, ci dà :

$$q) \qquad (n\text{-}3, n\text{-}1\; n)\,(a, n\text{-}1) = (a, n\text{-}2) + (a\text{-}1, n\text{-}1) + (n\text{-}3, n\text{-}2, \overline{n\text{-}1})\,\,(a, \overline{n\text{-}1}).$$

Dal confronto della $p)$ con la $q)$ risulta la $\alpha_{2,1}^{2,0})$.

7. Si moltiplichi simbolicamente la $\alpha_{2,0}^{1,0})$ per $(n\text{-}3, n\text{-}1, n)$, si avrà :

$$(a, n\text{-}1, n)\,(n\text{-}3, n\text{-}1, n)\,(n\text{-}2, n) = (n\text{-}3, n\text{-}1, n)\,(a, n) + (a, n\text{-}2, n)\,(n\text{-}3, n\text{-}1, n).$$

La formola $\tau)$, citata in principio, relativa al prodotto di due condizioni inerenti al piano, ci dà in questo caso :

$$(a, n\text{-}1, n)\,(n\text{-}3, n\text{-}1, n) = (a\text{-}1, n\text{-}1, n) + (a, n\text{-}2, n),$$

$$(a, n\text{-}2, n)\,(n\text{-}3, n\text{-}1, n) = (a\text{-}1, n\text{-}2, n) + (a, n\text{-}3, n) + (a, n\text{-}2\; n\text{-}1),$$

perciò la precedente eguaglianza si può scrivere:

$$(a\text{-}1, n\text{-}1, n)(n\text{-}2, n) + (a, n\text{-}2, n)(n\text{-}2, n) = (n\text{-}3, n\text{-}1, n)(a, n) + (a\text{-}1, n\text{-}2, n)$$
$$+ (a, n\text{-}3, n) + (a, n\text{-}2, n\text{-}1),$$

e ancora, tenendo conto della $\alpha^{1,0}_{2,0}$) (in questa si cambî a in a-1) e della $\gamma^{2,0}_{12,0}$):

$$(a\text{-}1, n) + (a\text{-}1, n\text{-}2, n) + (a, n\text{-}1, n)(n\text{-}3, n) + (a, n\text{-}2, n\text{-}1) - (a\text{-}1, n) =$$
$$= (n\text{-}3, n\text{-}1, n)(a, n) + (a\text{-}1, n\text{-}2, n) + (a, n\text{-}3, n) + (a, n\text{-}2, n\text{-}1),$$

cioè, riducendo:

$\alpha^{1,0}_{3,0}$) $$(a, n\text{-}1, n)(n\text{-}3, n) = (n\text{-}3, n\text{-}1, n)(a, n) + (a, n\text{-}3, n); \qquad a < n\text{-}2).$$

Con analogo procedimento si trova:

$\alpha^{1,0}_{4,0}$) $$(a, n\text{-}1, n)(n\text{-}4, n) = (n\text{-}4, n\text{-}1, n)(a, n) + (a, n\text{-}4, n); \qquad a < n\text{-}3,$$

quando prima però si conosca la $\gamma^{3,0}_{12,0}$). A tal fine moltiplichiamo la $\alpha^{1,0}_{2,0}$) per $(n\text{-}2, n\text{-}1)$, otteniamo:

$$(a, n\text{-}1, n)(n\text{-}3, n\text{-}1) = (n\text{-}3, n\text{-}1, n)(a, n\text{-}1) + (a, n\text{-}3, n\text{-}1),$$

cioè, per la $\alpha^{2,0}_{2,1}$):

$\alpha^{1,0}_{2,0}$) $$(a, n\text{-}1, n)(n\text{-}3, n\text{-}1) = (n\text{-}3, n\text{-}1, n)(a, n\text{-}1) + (a, n\text{-}3, n\text{-}1).$$

D'altro canto, moltiplicando la $\alpha^{1,0}_{3,0}$) per $(n\text{-}2, n)$, si ottiene:

$$(a, n\text{-}1, n)(n\text{-}3, n\text{-}1) + (a, n\text{-}1, n)(n\text{-}4, n) = (n\text{-}3, n\text{-}1, n)(a, n\text{-}1) + (n\text{-}3, n\text{-}1, n)(a\text{-}1, n)$$
$$+ (a, n\text{-}3, n)(n\text{-}2, n);$$

questa uguaglianza per la $\alpha^{1,0}_{3,1}$) diviene:

$$(a, n\text{-}1, n)(n\text{-}4, n) + (a, n\text{-}3, n\text{-}1) = (n\text{-}3, n\text{-}1, n)(a\text{-}1, n) + (a, n\text{-}3, n)(n\text{-}2, n),$$

cioè:

$\gamma^{3,0}_{12,0}$) $$(a, n\text{-}3, n)(n\text{-}2, n) = (a, n\text{-}1, n)(n\text{-}4, n) + (a, n\text{-}3, n\text{-}1) - (n\text{-}3, n\text{-}1, n)(a\text{-}1, n)$$

Si moltiplichi ora la $\alpha^{1,0}_{2,0})$ per $(n\text{-}4, n\text{-}1, n)$; sviluppando poscia i prodotti relativi a due condizioni del piano secondo la nota formola $\tau)$ e sostituendo si avrà:

$$(a\text{-}2, n\text{-}1, n)(n\text{-}2, n) + (a\text{-}1, n\text{-}1, n)(n\text{-}2, n) + (a, n\text{-}3\ n)(n\text{-}2, n) = (n\text{-}4, n\text{-}1, n)\ (a, n)$$

$$+ (a\text{-}2, n\text{-}2, n) + (a\text{-}1, n\text{-}3, n) - (a, n\text{-}4, n) + (a\text{-}1, n\text{-}2, n\text{-}1) + (a, n\text{-}3, n\text{-}1).$$

Questa eguaglianza, trasformandone il 1° membro mediante la $\alpha^{1,0}_{2,0})$ (cangiando a in a-2), la $\gamma^{2,0}_{2,0})$ (cangiando a in a-1) e la $\gamma^{3,0}_{2,0})$ e tosto riducendo, diverrà:

$$(a\text{-}1, n\text{-}1, n)(n\text{-}3, n) + (a, n\text{-}1, n)(n\text{-}4, n) - (n\text{-}3, n\text{-}1, n)(a\text{-}1, n) = (n\text{-}4, n\text{-}1, n)(a, n)$$

$$+ (a\text{-}1, n\text{-}3, n) + (a, n\text{-}4, n),$$

ma per la $\alpha^{1,0}_{3,0})$ (cangiando a in a-1) è:

$$(a\text{-}1, n\text{-}1\ n)(n\text{-}3, n) = (n\text{-}3, n\text{-}1, n)\ (a\text{-}1, n) + (a\text{-}1, n\text{-}3, n).$$

quindi, sostituendo e riducendo, si perviene alla $\alpha^{1,0}_{4,0})$.

8. Come dalle $\alpha^{1,0}_{2,0})$, $\alpha^{1,0}_{2,1})$ si ricavò la $\alpha^{2,0}_{2,1})$, così, con analogo procedimento dalle $\alpha^{1,0}_{3,0})$, $\alpha^{1,0}_{2,0})$ si otterrà la:

$$\alpha^{3,0}_{2,1})\quad (a, n\text{-}3, n)(n\text{-}2, n\text{-}1) = (n\text{-}4, n\text{-}1, n) + (a, n\text{-}4, n\text{-}1) - (n\text{-}3, n\text{-}1, n)\ (a\text{-}1, n\text{-}1);$$
$$a < n\text{-}3.$$

Infatti moltiplicando la $\alpha^{1,0}_{3,0})$ per $(n\text{-}2, n\text{-}1)$, la $\alpha^{1}_{2,1})$ per $(n\text{-}3, n)$ e uguagliando i secondi membri risultanti si ha (isolo al primo membro la condizione $(a, n\text{-}3, n)\ (n\text{-}2, n\text{-}1)$):

$$(a, n\text{-}3, n)(n\text{-}2, n\text{-}1) = (a, n\text{-}3) + (a\text{-}1, n\text{-}2) - (a\text{-}2, n\text{-}1) + (a, n\text{-}2, \overline{n\text{-}1})\ (n\text{-}4, \overline{n\text{-}1})$$

$$- (n\text{-}3, n\text{-}1, n)\ (a\text{-}1, n\text{-}1).$$

Per la stessa $\alpha^{1,0}_{3,0})$, applicata in un $[n\text{-}1]$ di $[n]$, è:

$$(a, n\text{-}2, \overline{n\text{-}1})\ (n\text{-}4, \overline{n\text{-}1}) = (n\text{-}4, n\text{-}2, \overline{n\text{-}1})\ (a, \overline{n\text{-}1}) + (a, n\text{-}4, n\text{-}1),$$

perciò, sostituendo, si ha:

$$(a, n\text{-}3, n)\,(n\text{-}2, n\text{-}1) = (a, n\text{-}3) + (a\text{-}1, n\text{-}2) + (a\text{-}2, n\text{-}1) + (n\text{-}4, n\text{-}2, \overline{n\text{-}1})\,(a, \overline{n\text{-}1})$$

$$+ (a, n\text{-}4, n\text{-}1) - (n\text{-}3, n\text{-}1, n)\,(a\text{-}1, n\text{-}1);$$

la $\alpha_{2,1}^{1,0}$), quando si ponga $a = n\text{-}4$ e tosto si moltiplichi per $(a+1, n)$, ci dà:

$$(n\text{-}4, n\text{-}2, n\text{-}1)\,(a, n\text{-}1) = (n\text{-}4, n\text{-}1, n)\,(a, n\text{-}1) - (a, n\text{-}3) - (a\text{-}1, n\text{-}2) - (a\text{-}2, n\text{-}1),$$

quindi, sostituendo ancora e riducendo, si ottiene la $\alpha_{2,1}^{3,0}$).

9. La $\alpha_{3,0}^{1,0}$) poi, moltiplicato, per $(n\text{-}2, n\text{-}1)$, ci dà:

$$(a, n\text{-}1, n)\,(n\text{-}4, n\text{-}1) = (n\text{-}3, n\text{-}1, n)\,(a\text{-}1, n\text{-}1) + (a, n\text{-}3, n)\,(n\text{-}2, n\text{-}1),$$

la quale eguaglianza, per la $\alpha_{2,1}^{3,0}$), diviene:

$$\alpha_{4,1}^{1,0}) \qquad (a, n\text{-}1, n)\,(n\text{-}4, n\text{-}1) = (n\text{-}4, n\text{-}1, n)\,(a, n\text{-}1) + (a, n\text{-}4, n\text{-}1).$$

Dal moltiplicare la $\alpha_{4,0}^{1,0}$) per $(n\text{-}2, n)$, risulta:

$$(a, n\text{-}1, n)\,(n\text{-}4, n\text{-}1) + (a, n\text{-}1, n)\,(n\text{-}5, n) = (n\text{-}4, n\text{-}1, n)\,(a, n\text{-}1) + (n\text{-}4, n\text{-}1, n)\,(a\text{-}1, n)$$

$$+ (a, n\text{-}4, n)\,(n\text{-}2, n)$$

e questa eguaglianza, per la $\alpha_{4,1}^{1,0}$), diviene (isolo al 1° membro la condizione $(a, n\text{-}4, n)\,(n\text{-}2, n)$):

$$\gamma_{2,0}^{4,0}) \quad (a, n\text{-}4, n)\,(n\text{-}2, n) = (a, n\text{-}1, n)\,(n\text{-}5, n) + (a, n\text{-}4, n\text{-}1) - (n\text{-}4, n\text{-}1, n)\,(a\text{-}1, n).$$

Si potrebbe verificare subito che, moltiplicando la $\alpha_{2,0}^{1,0}$) per $(n\text{-}5, n\text{-}1, n)$ e poi servendoci delle $\alpha_{2,0}^{1,0}$), $\gamma_{2,0}^{2,0}$), $\gamma_{2,0}^{3,0}$), $\alpha_{4,0}^{1,0}$), si otterrebbe la:

$$\alpha_{5,0}^{1,0}) \qquad (a, n\text{-}1)\,(n\text{-}5, n) = (n\text{-}5, n\text{-}1, n)\,(a, n) + (a, n\text{-}5, n);$$

sicchè, applicando ripetutamente i varii procedimenti fin quì tenuti, verremmo ad ottenere in generale le seguenti formole d'incidenza :

$\alpha^{1,0}_{k,0})$ $\quad (a, n\text{-}1, n)\,(n\text{-}k, n) = (n\text{-}k, n\text{-}1, n)\,(a, n) + (a, n\text{-}k, n)\,; \qquad a < n\text{-}k + 1,$

$\alpha^{k,0}_{2,1})$ $\quad (a, n\text{-}k, n)\,(n\text{-}2, n\text{-}1) = (n\text{-}k\text{-}1, n\text{-}1, n)\,(a, n\text{-}1) + (a, n\text{-}k\text{-}1, n\text{-}1)$

$$- (n\text{-}k, n\text{-}1, n)\,(a\text{-}1, n\text{-}1)\,; \qquad a < n\text{-}k,$$

$\alpha^{1,0}_{k,1})$ $\quad (a, n\text{-}1, n)\,(n\text{-}k, n\text{-}1) = (n\text{-}k, n\text{-}1, n)\,(a, n\text{-}1) + (a, n\text{-}k, n\text{-}1)\,; \qquad a < n\text{-}k + 1,$

$\gamma^{k,0}_{2,0})$ $\quad (a, n\text{-}k, n)\,(n\text{-}2, n) = (a, n\text{-}1, n)\,(n\text{-}k\text{-}1, n) + (a, n\text{-}k, n\text{-}1) - (n\text{-}k, n\text{-}1, n)(a\text{-}1, n);$

$$a < n\text{-}k + 1,$$

le quali costituiscono una notevole generalizzazione delle formole fondamentali. Si noti che la $\gamma^{k,0}_{2,0})$, in virtù della $\alpha^{1,0}_{k+1,0})$ (*), diviene :

$\alpha^{k,0}_{2,0})$ $\quad (a, n\text{-}k, n)\,(n\text{-}2, n) = (n\text{-}k\text{-}1, n\text{-}1, n)\,(a, n) + (a, n\text{-}k, n\text{-}1, n) + (a, n\text{-}k, n\text{-}1)$

$$- (n\text{-}k, n\text{-}1, n)\,(a\text{-}1, n)\,; \qquad a < n\text{-}k.$$

10. Dal moltiplicare simbolicamente ambo i membri della $\alpha^{k,0}_{2,1})$ per $(n\text{-}2,\ n\text{-}1)$, risulta :

$$(a, n\text{-}k, n)\ (n\text{-}3, n\text{-}2) = (n\text{-}k\text{-}1\ n\text{-}1\ n)\ (a\text{-}1, n\text{-}2) + (a, n\text{-}k\text{-}1, \overline{n\text{-}1})\,(n\text{-}3, \overline{n\text{-}2})$$
$$- (n\text{-}k, n\text{-}1, n)\ (a\text{-}2, n\text{-}3)\,,$$

la quale egnaglianza, notando che, per la $\alpha^{k,0}_{2,1})$ applicata in un $[n\text{-}1]$ di $[n]$, è :

$$(a, n\text{-}k\text{-}1, \overline{n\text{-}1})\ (n\text{-}3, \overline{n\text{-}2}) = (n\text{-}k\text{-}2, n\text{-}2, \overline{n\text{-}1})\,(a, \overline{n\text{-}2}) + (a, n\text{-}k\text{-}2, n\text{-}2)$$
$$- n\text{-}k\text{-}1, n\text{-}2, \overline{n\text{-}1})\,(a\text{-}1, \overline{n\text{-}2})\,; \quad a < n\text{-}k\text{-}1,$$

diviene :

$$(a, n\text{-}k, n)\,(n\text{-}3, n\text{-}2) = (n\text{-}k\text{-}1, n\text{-}1, n)\ \ (a\text{-}1, n\text{-}2) + (n\text{-}k\text{-}2, n\text{-}2, \overline{n\text{-}1})\ (a, \overline{n\text{-}2})$$
$$+ (a, n\text{-}k\text{-}2, n\text{-}2) - (n\text{-}k\text{-}1, n\text{-}2, \ \overline{n\text{-}1})\ (a\text{-}1, \overline{n\text{-}2}) - (n\text{-}k\text{-}1, n)\,(a\text{-}2, n\text{-}2).$$

(*) Evidentemente per ottenere la $\alpha^{1,0}_{k+1,0})$ non bisogna fare altro che sostituire nella $\alpha^{1,0}_{k,0})$ k con $k+1$.

Ma, ponendo in $\alpha_{2,1}^{1,0}$): una volta $a = n\text{-}k\text{-}2$ e quindi moltiplicando per $(a+1, n\text{-}1)$: un'altra volta $a = n\text{-}k\text{-}1$ e quindi moltiplicando per $(a, n\text{-}1)$, si ottengono le due relazioni:

$$(n\text{-}k\text{-}2, n\text{-}2, \overline{n\text{-}1})(a, \overline{n\text{-}2}) = (n\text{-}k\text{-}2, n\text{-}1, n)(a, n\text{-}2) - (a, n\text{-}k\text{-}2 - \ldots - (a\text{-}k, n\text{-}2),$$

$$(n\text{-}k\text{-}1, n\text{-}2, \overline{n\text{-}1})(a\text{-}1, \overline{n\text{-}2}) = (n\text{-}k\text{-}1, n\text{-}1, n)(a\text{-}1, n\text{-}2) - (a\text{-}1, n\text{-}k\text{-}1) - \ldots - (a\text{-}k, n\text{-}2);$$

epperò, sostituendo e riducendo, si ha:

$$\alpha_{3,2}^{k,0}) \quad (a, n\text{-}k, n)(n\text{-}3, n\text{-}2) = (n\text{-}k\text{-}2, n\text{-}1, n)(a, n\text{-}2) + (a, n\text{-}k\text{-}2, n\text{-}2) - (a, n\text{-}k\text{-}2)$$
$$- (n\text{-}a, n\text{-}1, n)(a\text{-}2, n\text{-}2): \qquad a < n\text{-}k\text{-}1.$$

Dal moltiplicare simbolicamente ambo i membri della $\alpha_{2,1}^{k,0}$) per $(n\text{-}3, n\text{-}2)$, risulta:

$$(a, n\text{-}k, n)(n\text{-}4, n\text{-}3) = (n\text{-}k\text{-}1, n\text{-}1, n)(a\text{-}2, n\text{-}3) + (a, n\text{-}k\text{-}1, \overline{n\text{-}1})(n\text{-}4, \overline{n\text{-}3})$$
$$- (n\text{-}k, n\text{-}1, n)(a\text{-}3, n\text{-}3);$$

questa eguaglianza, notando che, per la $\alpha_{3,2}^{k,0}$) applicata in $[n\text{-}1]$ di $[n]$, è:

$$(a, n\text{-}k\text{-}1, \overline{n\text{-}1})(n\text{-}4, \overline{n\text{-}3}) = (n\text{-}k\text{-}3, n\text{-}2, \overline{n\text{-}1})(a, \overline{n\text{-}3}) + (a, n\text{-}k\text{-}3, n\text{-}3)$$
$$- (n\text{-}3, n\text{-}2, \overline{n\text{-}1})(a, \overline{n\text{-}k\text{-}3}) - (n\text{-}k\text{-}1, n\text{-}2, n\text{-}1)(a\text{-}2, \overline{n\text{-}3}); \quad a < n\text{-}k\text{-}2,$$

diviene:

$$(a, n\text{-}k, n)(n\text{-}4, n\text{-}3) = (n\text{-}k\text{-}1, n\text{-}1, n)(a\text{-}2, n\text{-}3) + (n\text{-}k\text{-}3, n\text{-}2, \overline{n\text{-}1})(a, \overline{n\text{-}3})$$
$$+ (a, n\text{-}k\text{-}3, n\text{-}3) - (n\text{-}3, n\text{-}2, \overline{n\text{-}1})(a, \overline{n\text{-}k\text{-}3})$$
$$- (n\text{-}k\text{-}1, n\text{-}2, \overline{n\text{-}1})(a\text{-}2, \overline{n\text{-}3}) - (n\text{-}k, n\text{-}1, n)(a\text{-}3, n\text{-}3).$$

Dalla $\alpha_{2,1}^{1,0}$), ponendo $a = n\text{-}k\text{-}3$ e quindi moltiplicando per $(a+1, n\text{-}2)$; ponendo $a = n\text{-}3$ e quindi moltiplicando per

$(a+1,\ n\text{-}k\text{-}2)$; ponendo $a = n\text{-}k\text{-}1$, e quindi moltiplicando per $(a\text{-}1,\ n\text{-}2)$, si ottengono rispettivamente le relazioni :

$$(n\text{-}k\text{-}3,\ n\text{-}2,\ \overline{n\text{-}1})\,(a,\ \overline{n\text{-}3}) = (n\text{-}k\text{-}3,\ n\text{-}1,\ n)\,(a,\ n\text{-}3) - (a,\ n\text{-}k\text{-}4) - (a\text{-}1,\ n\text{-}k\text{-}3)$$
$$- (a\text{-}2,\ n\text{-}k\text{-}2) - \ldots\ldots\ldots - (a\text{-}k\text{-}1,\ n\text{-}3),$$

$$(n\text{-}3,\ n\text{-}2,\ \overline{n\text{-}1})\,(a,\ \overline{n\text{-}k\text{-}3}) = (n\text{-}3,\ n\text{-}1,\ n)\,(a,\ n\text{-}k\text{-}3) - (a,\ n\text{-}k\text{-}4) - (a\text{-}1,\ n\text{-}k\text{-}3),$$

$$(n\text{-}k\text{-}1,\ n\text{-}2,\ \overline{n\text{-}1})\,(a\text{-}2,\ \overline{n\text{-}3}) = (n\text{-}k\text{-}1,\ n\text{-}1,\ n)\,(a\text{-}2,\ n\text{-}3) - (a\text{-}2,\ n\text{-}k\text{-}2)$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - (a\text{-}k\text{-}1,\ n\text{-}3),$$

sicchè, sostituendo questi risultati nell' ultima eguaglianza e riducendo, si ha :

$$\alpha^{k,0}_{1,3})\quad (a,\ n\text{-}k,\ n)\,(n\text{-}4,\ n\text{-}3) = (n\text{-}k\text{-}3,\ n\text{-}1,\ n)\,(a,\ n\text{-}3) + (a,\ n\text{-}k\text{-}3,\ n\text{-}3)$$
$$- (n\text{-}3,\ n\text{-}1,\ n)\,(a,\ n\text{-}k\text{-}3) - (n\text{-}k,\ n\text{-}1,\ n)\,(a\text{-}3,\ n\text{-}3)\ :\ a < n\text{-}k\text{-}2).$$

In generale, applicando successivamente l-1 volte il presente procedimento, si troverà :

$$\alpha^{k,0}_{l+1,l})\quad (a,\ n\text{-}k,\ n)\,(n\text{-}l\text{-}1,\ n\text{-}l) = (n\text{-}k\text{-}l,\ n\text{-}1,\ n)\,(a,\ n\text{-}l) + (a,\ n\text{-}k\text{-}l,\ n\text{-}l)$$
$$- (n\text{-}l,\ n\text{-}1,\ n)\,(a,\ n\text{-}k\text{-}l) - (n\text{-}k,\ n\text{-}1,\ n)\,(a\text{-}l,\ n\text{-}l)\ :\ a < n\text{-}l\text{-}k+1.$$

11. Intanto, se la $\alpha^{1,0}_{k,0})$ si moltiplica per $(n\text{-}l\text{-}1,\ n\text{-}l)$, si ottiene l' eguaglianza :

$$(a,\ n\text{-}1,\ n)\,(n\text{-}k\text{-}l,\ n\text{-}l) = (n\text{-}k,\ n\text{-}1,\ n)\,(a\text{-}l,\ n\text{-}l) + (a,\ n\text{-}k,\ n)\,(n\text{-}l\text{-}1,\ n\text{-}l).$$

che, in virtù della $\alpha^{k,0}_{l+1,l})$, si trasforma nell' altra :

$$\alpha^{1,0}_{k+l,l})\quad (a,\ n\text{-}1,\ n)\,(n\text{-}k\text{-}l,\ n\text{-}l) = (n\text{-}k\text{-}l,\ n\text{-}1,\ n)\,(a,\ n\text{-}l) + (a,\ n\text{-}k\text{-}l,\ n\text{-}l)$$
$$- (n\text{-}l,\ n\text{-}1,\ n)\,(a,\ n\text{-}k\text{-}l)\ ; \qquad a < n\text{-}l\text{-}k+1.$$

12. Or la $\alpha_{2.0}^{k,0})$, applicata in un $[n\text{-}s]$ di $[n]$, diviene:

$$(a,\ n\text{-}k\text{-}s,\ n\text{-}s)\,(n\text{-}2,\ n) = (a,\ n\text{-}k\text{-}s,\ n\text{-}s)\,(n\text{-}s\text{-}2,\ \overline{n\text{-}s}) = (n\text{-}k\text{-}s\text{-}1,\ n\text{-}s\text{-}1,\ \overline{n\text{-}s})\,(a,\ \overline{n\text{-}s})$$

$$-(a,\ n\text{-}k\text{-}s\text{-}1,\ n\text{-}s) + (a,\ n\text{-}k\text{-}s,\ n\text{-}s\text{-}1) - (n\text{-}k\text{-}s,\ n\text{-}s\text{-}1,\ \overline{n\text{-}s})\,(a\text{-}1,\ \overline{n\text{-}s}):$$

$$a < n\text{-}k\text{-}s$$

e d'altro canto la $\alpha_{k+l,l}^{1,0})$, ponendo: una volta $n\text{-}k\text{-}s\text{-}1$ in luogo di a, s in luogo di l, $k=1$ e quindi moltiplicando per $(a+s,\ n)$; un'altra volta $n\text{-}k\text{-}s$ in luogo di a, s in luogo di l, $k=1$ e quindi moltiplicando per $(a+s\text{-}1,\ n)$, ci fornisce le due relazioni:

$$(n\text{-}k\text{-}s\text{-}1,\ n\text{-}s\text{-}1,\ \overline{n\text{-}s})\,(a,\ \overline{n\text{-}s}) = (n\text{-}k\text{-}s\text{-}1,\ n\text{-}1,\ n)\,(a,\ n\text{-}s)$$

$$+(n\text{-}s,\ n\text{-}1,\ n)\,\big|\,(a\text{-}1,\ n\text{-}k\text{-}s) + (a\text{-}2,\ n\text{-}k\text{-}s+1) + \ldots\ldots + (a\text{-}k,\ n\text{-}s\text{-}1)\,\big|$$

$$-(n\text{-}s\text{-}1,\ n\text{-}1,\ n)\,\big|\,(a,\ n\text{-}k\text{-}s) + (a\text{-}1,\ n\text{-}k\text{-}s+1) + \ldots\ldots\ldots\ (a\text{-}k,\ n\text{-}s)\,\big|.$$

$$(n\text{-}k\text{-}s,\ n\text{-}s\text{-}1,\ \overline{n\text{-}s})\,(a\text{-}1,\ \overline{n\text{-}s}) = (n\text{-}k\text{-}s,\ n\text{-}1,\ n)\,(a\text{-}1,\ n\text{-}s)$$

$$+(n\text{-}s,\ n\text{-}1,\ n)\,\big|\,(a\text{-}2,\ n\text{-}k\text{-}s+1) + (a\text{-}s,\ n\text{-}k\text{-}s+2) + \ldots\ldots + (a\text{-}k,\ n\text{-}s\text{-}1)\,\big|$$

$$-(n\text{-}s\text{-}1,\ n\text{-}1,\ n)\,\big|\,(a\text{-}1,\ n\text{-}s\text{-}k+1) + (a\text{-}2,\ n\text{-}s\text{-}k+2) + \ldots\ldots\ldots\ (a\text{-}k,\ n\text{-}s)\,\big|.$$

perciò, sostituendo nella precedente egnaglianza e riducendo, si avrà la formola:

$$\alpha_{2,0}^{k+s,s})\quad (a,\ n\text{-}k\text{-}s,\ n\text{-}s)\,(n\text{-}2,\ n) = (n\text{-}k\text{-}s\text{-}1,\ n\text{-}1,\ n)\,(a,\ n\text{-}s) - (n\text{-}s,\ n\text{-}1,\ n)\,(a\text{-}1,\ n\text{-}k\text{-}s)$$

$$+(a,\ n\text{-}k\text{-}s\text{-}1,\ n\text{-}s) + (a,\ n\text{-}k\text{-}s,\ n\text{-}s\text{-}1) - (n\text{-}k\text{-}s,\ n\text{-}1,\ n)\,(a\text{-}1,\ n\text{-}s)$$

$$-(n\text{-}s\text{-}1,\ n\text{-}1,\ n)\,(a,\ n\text{-}k\text{-}s): \qquad a < n\text{-}k\text{-}s.$$

13. Allo stesso modo si passa dalla $\alpha_{l+1,l}^{k,0})$ alla formola più generale $\alpha_{l+1,l}^{k+s,s})$.

Difatti la $\alpha_{l+1,l}^{k,0})$, applicata in un $[n\text{-}s]$ di $[n]$, si trasforma come segue:

$$(a,\ n\text{-}k\text{-}s,\ n\text{-}s)\,(n\text{-}l\text{-}1,\ n\text{-}l) = (a,\ n\text{-}k\text{-}s,\ \overline{n\text{-}s})\,(n\text{-}l\text{-}s\text{-}1,\ \overline{n\text{-}l\text{-}s}) =$$

$$= (n\text{-}l\text{-}k\text{-}s,\ n\text{-}s\text{-}1,\ \overline{n\text{-}s})\,(a,\overline{n\text{-}l\text{-}s}) + (a,\ n\text{-}k\text{-}l\text{-}s,\ n\text{-}l\text{-}s) - (n\text{-}l\text{-}s,\ n\text{-}s\text{-}1,\ \overline{n\text{-}s})\,(a,\ \overline{n\text{-}l\text{-}k\text{-}s})$$

$$- (n\text{-}k\text{-}s,\ n\text{-}s\text{-}1,\ \overline{n\text{-}s})\,(a\text{-}l,\ \overline{n\text{-}l\text{-}s})\,; \qquad a < n\text{-}l\text{-}k\text{-}s+1,$$

mentre dalla medesima, se si pone: una volta n-l-s-k in luogo di a, s in luogo di l, $k = 1$ e quindi si moltiplica per $(a + s,\ n\text{-}l)$; un' altra volta n-l-s in luogo di a, s in luogo di l, $k = 1$ e quindi si moltiplica per $(a + s,\ n\text{-}l\text{-}k)$; una terza volta n-k-s in luogo di a, s in luogo di l, $k = 1$ e quindi si moltiplica per $(a + s\text{-}l,\ n\text{-}l)$, si ricavano le seguenti relazioni:

$$(n\text{-}l\text{-}s\text{-}k,\ n\text{-}s\text{-}1,\ \overline{n\text{-}s})\,(a,\ \overline{n\text{-}l\text{-}s}) = (n\text{-}l\text{-}s\text{-}k,\ n\text{-}1,\ n)\,(a,\ n\text{-}l\text{-}s)$$

$$+ (n\text{-}s,\ n\text{-}1,\ n)\,\big|\,(a\text{-}1,\ n\text{-}2l\text{-}s\text{-}k+1) + \ldots\ldots + (a\text{-}l\text{-}k+1,\ n\text{-}l\text{-}s\text{-}1)\,\big|$$

$$- (n\text{-}s\text{-}1,\ n\text{-}1,n)\,\big|\,(a,\ n\text{-}2l\text{-}s\text{-}k+1) + \ldots\ldots + (a\text{-}l\text{-}k+1,\ n\text{-}l\text{-}s)\,\big|,$$

$$(n\text{-}l\text{-}s,\ n\text{-}s\text{-}1,\ \overline{n\text{-}s})\,(a,\ \overline{n\text{-}l\text{-}k\text{-}s}) = (n\text{-}l\text{-}s,\ n\text{-}1,\ n)\,(a,\ n\text{-}l\text{-}s\text{-}k)$$

$$+ (n\text{-}s,\ n\text{-}1,\ n)\,\big|\,(a\text{-}1,\ n\text{-}2l\text{-}k\text{-}s+1) + \ldots\ldots + (a\text{-}l+1,\ n\text{-}l\text{-}s\text{-}k\text{-}1)\,\big|$$

$$- (n\text{-}s\text{-}1,\ n\text{-}1,\ n)\,\big|\,(a,\ n\text{-}2l\text{-}k\text{-}s+1) + \ldots\ldots + (a\text{-}l+1,\ n\text{-}l\text{-}s\text{-}k)\,\big|,$$

$$(n\text{-}k\text{-}s,\ n\text{-}s\text{-}1,\ \overline{n\text{-}s})\,(a\text{-}l,\ \overline{n\text{-}l\text{-}s}) = (n\text{-}k\text{-}s,\ n\text{-}1,\ n)\,(a\text{-}l,\ n\text{-}l\text{-}s)$$

$$+ (n\text{-}s,\ n\text{-}1,\ n)\,\big|\,(a\text{-}l\text{-}1,\ n\text{-}l\text{-}s\text{-}k+1) + \ldots\ldots + (a\text{-}l\text{-}k+1,\ n\text{-}l\text{-}s\text{-}1)\,\big|$$

$$- (n\text{-}s\text{-}1,\ n\text{-}1,\ n)\,\big|\,(a\text{-}l,\ n\text{-}l\text{-}s\text{-}k+1) + \ldots\ldots + (a\text{-}l\text{-}k+1,\ n\text{-}l\text{-}s)\,\big|,$$

perciò, sostituendo nella precedente eguaglianza e riducendo, si ottiene la formola:

$$a_{l+1,\ l}^{k+s,\ s})\ (a,\ n\text{-}k\text{-}s,\ n\text{-}s)\,(n\text{-}l\text{-}1,\ n\text{-}l) = (n\text{-}l\text{-}s\text{-}k,\ n\text{-}1,\ n)\,(a,\ n\text{-}l\text{-}s) + (a,\ n\text{-}l\text{-}s\text{-}k,\ n\text{-}l\text{-}s)$$

$$+ (n\text{-}s,\ n\text{-}1,n)\,(a\text{-}l,\ n\text{-}l\text{-}s\text{-}k) - (n\text{-}l\text{-}s,\ n\text{-}1,\ n)\,(a,n\text{-}l\text{-}s\text{-}k)$$

$$- (n\text{-}k\text{-}s,\ n\text{-}1,\ n)\,(a\text{-}l,\ n\text{-}l\text{-}s)\,; \qquad a < n\text{-}l\text{-}s\text{-}k + 1,$$

la quale è una formola d' incidenza, di $(n + 2s + 2l + k\text{-}a\text{-}3)^{ma}$ dimensione, abbastanza generale per la coppia di un piano e una retta incidenti, e, riferita ad una serie algebrica $\infty^{n+2s+2l+k-a-3}$ di tali coppie, rappresenta una relazione tra numeri, ciascun dei quali si riferisce ad una delle condizioni fondamentali in essa scritte, esprimendo quante coppie della serie soddisfano quella condizione.

14. Alquanto caratteristica, ma non del tipo delle formole *a)*, è la formola d' incidenza:

$$\eta)\quad (a, n\text{-}1, n)\left[(n - \frac{r}{2} - 1, n)^2 - (n - \frac{r}{2}, n\text{-}1)^2\right] = (n\text{-}r, n)\left[(a, n) + (a, n\text{-}2, n)\right],$$

di $(n + r - a - 2)^{ma}$ dimensione, valida per r *pari* ed $a < n$-1.

Per la dimostrazione, risolviamo, secondo la formola θ), i due prodotti simbolici:

$$(n - \frac{r}{2} - 1, n)(n - \frac{r}{2} - 1, n),\quad (n - \frac{r}{2}, n - 1)(n - \frac{r}{2}, n\text{-}1).$$

che possono anche denotarsi rispettivamente coi simboli:

$$(n - \frac{r}{2} - 1, n)^2,\ (n - \frac{r}{2}, n\text{-}1)^2,$$

si avrà:

$$(n - \frac{r}{2} - 1, n)^2 = (n - \frac{r}{2} - 1, n - \frac{r}{2}) + (n - \frac{r}{2} - 2, n - \frac{r}{2} + 1)$$
$$+ \ldots\ldots + (n\text{-}r + 1, n\text{-}2) + (n\text{-}r, n\text{-}1) + (n\text{-}r\text{-}1, n),$$

$$(n - \frac{r}{2}, n\text{-}1)^2 = (n - \frac{r}{2} - 1, n - \frac{r}{2}) + (n - \frac{r}{2} - 2, n - \frac{r}{2} + 1)$$
$$+ \ldots\ldots + (n\text{-}r + 1, n\text{-}2),$$

da cui, sottraendo membro a membro, si ricava:

$$\mu)\quad (n - \frac{r}{2} - 1, n)^2 - (n - \frac{r}{2}, n\text{-}1)^2 = (n\text{-}r, n\text{-}1) + (n\text{-}r\text{-}1, n);\qquad r \text{ numero pari.}$$

Or, se moltiplichiamo simbolicamente la $a^{1,0}_{2,0}$) per $(n\text{-}r, n)$, si ottiene:

$$(a, n\text{-}1, n)(n\text{-}r, n)(n\text{-}2, n) = (n\text{-}r, n)\left[(a, n) + (a, n\text{-}2, n)\right].$$

ma, per la θ), è :

$$(n\text{-}r,\, n)\,(n\text{-}2,\, n) = (n\text{-}r,\, n\text{-}1) + (n\text{-}r\text{-}1,\, n)\,,$$

quindi, in virtù della relazione μ), si ha la η).

Riferita ad una serie algebrica $\infty^{n+r-a-2}$ di coppie, costituite da una retta e un piano incidenti, la η) esprime che : « *la differenza tra il numero delle coppie, per cui il piano incontra un dato* [a], *mentre la retta s' appoggia a due dati* [n - $\frac{r}{2}$ - 1], *e il numero di quelle per cui il piano incontra il dato* [a], *mentre la retta s' appoggia a due dati* [n - $\frac{r}{2}$] *e giace in due dati* [n-1], *passanti rispettivamente per questi, uguaglia il numero delle coppie, per cui il piano incontra il dato* [a] *e taglia un dato* [n-2], *passante per questo, secondo una retta, mentre la retta incontra un dato* [n-r], *accresciuto del numero di quelle, per cui la retta soltanto s'appoggia all'* [a] *e all'* [n-r] ».

§ IV.

Formole d' incidenza per il punto e il piano

15. La coppia, costituita da un punto e un piano incidenti, ha per numero di costanti : $3n$-4.

La formola fondamentale d' incidenza, relativa ad una tal coppia, si può ottenere per semplice calcolo dalle formole fondamentali d' incidenza, inerenti alle coppie di un punto e una retta, di una retta e un piano, incidenti. Basta infatti notare che, se un punto deve giacere in una retta e questa in un piano, anche il punto deve giacere in quel piano. Intanto, rispetto alla coppia di un punto e una retta incidenti, ha luogo la relazione :

$$(n\text{-}2,\, n)\,(n\text{-}1) = (n\text{-}2) + (n\text{-}2,\, n\text{-}1),$$

che si ricava dalla formola I) del § I facendo $a = n\text{-}2$; rispetto alla coppia di una retta e un piano incidenti, ha luogo l'altra relazione :

$$(a,\, n\text{-}1,\, n)\,(n\text{-}2,\, n) = (a,\, n) + (a,\, n\text{-}2,\, n),$$

che è la formola $a_{2,0}^{1,0}$) del § III.

Per aver dunque una relazione fra condizioni, relative al punto e al piano solamente, bisogna eliminare fra queste due eguaglianze le due condizioni $(n\text{-}2, n)$, $(n\text{-}2, n\text{-}1)$, inerenti alla retta.

A tal fine si moltiplichi la prima di esse per $(a, n\text{-}1, n)$, la seconda per $(n\text{-}1)$ e si uguaglino i secondi membri risultanti, si avrà:

$$(a, n\text{-}1, n)(n\text{-}2) + (a, n\text{-}1, n)(n\text{-}2, n\text{-}1) = (a, n)(n\text{-}1) + (a, n\text{-}2, n)(n\text{-}1):$$

questa eguaglianza, in virtù della 1) del § I e della $\alpha_{2,1}^{1,0}$) del § III, si trasforma nell' altra:

$$(a, n\text{-}1, n)(n\text{-}2) + (a, n\text{-}2, n\text{-}1) = (a) + (a, n\text{-}2, n)(n\text{-}1),$$

ossia:

$$\beta_1^{2,0})\quad (a, n\text{-}2, n)(n\text{-}1) = (a, n\text{-}1, n)(n\text{-}2) + (a, n\text{-}2, n\text{-}1) - (a); \qquad a < n\text{-}1 \qquad (*).$$

che è la formola cercata.

Questa formola si può anche dimostrare col principio della conservazione del numero. Infatti, indicando per brevità con P e π rispettivamente il punto e il piano della coppia, prendasi l'$[n\text{-}2]$ della condizione $(a, n\text{-}2, n)$ nell' $[n\text{-}1]$ della condizione $(n\text{-}1)$: allora la condizione $(a, n\text{-}2, n)(n\text{-}1)$ sarà soddisfatta:

1°) Se P giace nell' $[n\text{-}2]$ senza giacere in $[a]$, da tutti i piani π che incontrano $[a]$, i quali taglieranno di conseguenza l' $[n\text{-}2]$ secondo una retta e da questi soltanto;

2°) se P non giace nell' $[n\text{-}2]$ ma soltanto nell' $[n\text{-}1]$, da tutti i piani π che incontrano $[a]$ e giacciono in questo $[n\text{-}1]$ e da essi soltanto.

Dunque le coppie (P, π) che soddisfano la condizione $(a, n\text{-}2, n)(n\text{-}1)$, saranno parte di quelle che soddisfano la condizione $(a, n\text{-}1, n)(n\text{-}2)$, più tutte quelle che soddisfano la condizione $(a, n\text{-}2, n\text{-}1)$; e le coppie, soddisfacenti la condizione

(*) Cfr. H. Schubert — Ueber die Incidenz . . . . . . § 3, form. 6) per $m = 0$, $r = 0$.

$(a, n\text{-}1, n)\,(n\text{-}2)$, senza soddisfare la $(a, n\text{-}2, n)\,(n\text{-}1)$, saranno quelle per cui il punto P giace in $[a]$. Pertanto, visto che le condizioni in discorso hanno il medesimo peso, deve sussistere la $\beta_1^{2,0}$).

16. La eliminazione delle condizioni, inerenti alla retta, fra formole d' incidenza, relative alle coppie di un punto e una retta, di una retta e un piano, incidenti, presenta maggiori difficoltà, allorchè si vogliano ottenere formole d' incidenza per il punto e il piano più generali della fondamentale. È più conveniente invece ricorrere alla moltiplicazione simbolica per condizioni inerenti al punto o al piano, in ciò, s' intende, tenendo conto della formola di risoluzione τ), concernente il prodotto di due condizioni relative al piano, come pure conviene ricorrere a quegli artifizii di cui s' è visto esempio nei §§ precedenti.

Così, moltiplicando la $\beta_1^{2,0}$) per $(n\text{-}3, n\text{-}1, n)$, si avrà :

$$(a\text{-}1, n\text{-}2, n)\,(n\text{-}1) + (a, n\text{-}3, n)\,(n\text{-}1) + (a, n\text{-}2, n\text{-}1)\,(n\text{-}1) = (a\text{-}1, n\text{-}1, n)\,(n\text{-}2)$$

$$(a, n\text{-}2, n)\,(n\text{-}2) - (n\text{-}3, n\text{-}1, n)\,(a) + (a\text{-}1, n\text{-}2, n\text{-}1) - (a, n\text{-}3, n\text{-}1).$$

D' altra parte, in forza della stessa $\beta_1^{2,0}$), posto in essa a-1 in luogo di a, è :

$$(a\text{-}1, n\text{-}2, n)\,(n\text{-}1) = (a\text{-}1, n\text{-}1, n)\,(n\text{-}2) - (a\text{-}1, n\text{-}2, n\text{-}1) - (a\text{-}1).$$

dunque, sostituendo e riducendo, si ottiene :

$$(a, n\text{-}3, n)\,(n\text{-}1) = (a, n\text{-}2, n)\,(n\text{-}2) - (a, n\text{-}2, n\text{-}1)\,(n\text{-}1) - (n\text{-}3, n\text{-}1, n)\,(a)$$

$$- (a, n\text{-}3, n\text{-}1) + (a\text{-}1).$$

D' altra parte, moltiplicando ancora $\beta_1^{2,0}$) per $(n\text{-}1)$, si ha, isolando al 1° membro il termine $(a, n\text{-}2, n\text{-}1)\,(n\text{-}1)$:

$$(a, n\text{-}2, n\text{-}1)\,(n\text{-}1) = (a, n\text{-}2, n)\,(n\text{-}2) - (a, n\text{-}1, n)\,(n\text{-}3) + (a\text{-}1),$$

perciò, sostituendo questo risultato nell'ultima eguaglianza e riducendo, si ottiene infine :

$$\beta_1^{3,0})\quad (a, n\text{-}3, n)\,(n\text{-}1) = (a, n\text{-}1, n)\,(n\text{-}3) + (a, n\text{-}3, n\text{-}1) - (n\text{-}3, n\text{-}1, n)\,(a)\,;\quad a < n\text{-}2.$$

Moltiplicando la $\beta_{1,}^{3,0}$) per $(n\text{-}3, n\text{-}1, n)$, si avrà:

$$(a, n\text{-}4, n)(n\text{-}1) + (a\text{-}1, n\text{-}3, n)(n\text{-}1) - (a, n\text{-}3, n\text{-}1)(n\text{-}1) = (a, n\text{-}2, n)(n\text{-}3)$$

$$+ (a\text{-}1, n\text{-}1, n)(n\text{-}3) + (a\text{-}1, n\text{-}1, n)(n\text{-}3) + (a\text{-}1, n\text{-}3, n\text{-}1) + (a, n\text{-}4, n\text{-}1)$$

$$+ (a, n\text{-}3, n\text{-}2) - (n\text{-}4, n\text{-}1, n)(a) - (n\text{-}3, n\text{-}2, n)(a).$$

Intanto, per la $\beta_1^{3,0}$) stessa, posto in essa a-1 in luogo di a, è:

$$(a\text{-}1, n\text{-}3, n)(n\text{-}1) = (a\text{-}1, n\text{-}1, n)(n\text{-}3) + (a\text{-}1, n\text{-}3, n\text{-}1) - (n\text{-}3, n\text{-}1, n)(a\text{-}1).$$

mentre la $\beta_{1,}^{2,0}$), applicata in un $[n\text{-}1]$ di $[n]$, ci dà:

$$(a, n\text{-}3, n\text{-}1)(n\text{-}1) = (a, n\text{-}3, \overline{n\text{-}1})(\overline{n\text{-}2}) = (a, n\text{-}2, \overline{n\text{-}1})(\overline{n\text{-}3}) + (a, n\text{-}3, n\text{-}2)$$

$$- (n\text{-}3, n\text{-}2, \overline{n\text{-}1})(a); \qquad a < n\text{-}2.$$

per cui, sostituendo e riducendo, si ha:

$$(a, n\text{-}4, n)(n\text{-}1) - (n\text{-}3, n\text{-}1, n)(n\text{-}1) + (a, n\text{-}2, \overline{n\text{-}1})(\overline{n\text{-}3}) - (n\text{-}3, n\text{-}2, \overline{n\text{-}1})(\overline{a}) =$$

$$= (a, n\text{-}2, n)(n\text{-}3) + (a, n\text{-}4, n\text{-}1) - (n\text{-}4, n\text{-}1, n)(a).$$

Questa eguaglianza, visto che dalla $\beta_1^{2,0}$), se si moltiplica per $(n\text{-}2)$, si ricava:

$$(a, n\text{-}2, \overline{n\text{-}1})(\overline{n\text{-}3}) = (a, n\text{-}2, n)(n\text{-}3) - (a, n\text{-}1, n)(n\text{-}4) + (a\text{-}2);$$

se si pone $a = n\text{-}3$ e quindi si moltiplica per $(a+1)$, si ricava:

$$(n\text{-}3, n\text{-}2, \overline{n\text{-}1})(\overline{a}) = (n\text{-}3, n\text{-}2, n)(a) - (n\text{-}3, n\text{-}1, n)(a\text{-}1) + (a\text{-}2),$$

diviene:

$$\beta_1^{4,0}) \quad (a, n\text{-}4, n)(n\text{-}1) = (a, n\text{-}1, n)(n\text{-}4) + (a, n\text{-}4, n\text{-}1) - (n\text{-}4, n\text{-}1, n)(a); \quad a < n\text{-}3.$$

Con questo procedimento si troverà in generale:

$$\beta_1^{l,0}). \quad (a, n\text{-}l, n)(n\text{-}1) = (a, n\text{-}1, n)(n\text{-}l) + (a, n\text{-}l, n\text{-}1) - (n\text{-}l, n\text{-}1, n)(a); \quad a < n\text{-}l+1.$$

17. Per generalizzare ancor più la $\beta_1^{l,0}$), la si moltiplichi per $(n\text{-}1)$; si avrà :

$$(a,\, n\text{-}l,\, n)\,(n\text{-}2) = (a,\, n\text{-}1,\, n)\,(n\text{-}l\text{-}1) + (a,\, n\text{-}l,\, n\text{-}1)\,(n\text{-}1) - (n\text{-}l,\, n\text{-}1,\, n)\,(a\text{-}1).$$

D' altra parte la $\beta_1^{l-1,0}$) (*), applicata in un $[n\text{-}1]$ di $[n]$ ci dà :

$$(a,\, n\text{-}l,\, n\text{-}1)\,(n\text{-}1) = (a,\, n\text{-}l,\, \overline{n\text{-}1})\,(\overline{n\text{-}2}) = (a,\, n\text{-}2,\, \overline{n\text{-}1})\,(\overline{n\text{-}l}) + (a,\, n\text{-}l,\, n\text{-}2)$$
$$- (n\text{-}l,\, n\text{-}2,\, \overline{n\text{-}1})\,(\overline{a}) : \qquad a < n\text{-}l+1.$$

mentre dalla $\beta_1^{2,0}$), moltiplicando per $(n\text{-}l+1)$, si ricava :

$$(a,\, n\text{-}2,\, \overline{n\text{-}1})\,(\overline{n\text{-}l}) = (a,\, n\text{-}2,\, n)\,(n\text{-}l) - (a,\, n\text{-}1,\, n)\,(n\text{-}l\text{-}1) + (a\text{-}l+1) :$$

ponendo $a = n\text{-}l$ e quindi moltiplicando per $(a+1)$, si ricava :

$$(n\text{-}l,\, n\text{-}2,\, \overline{n\text{-}1})\,(\overline{a}) = (n\text{-}l,\, n\text{-}2,\, n)\,(a) - (n\text{-}l,\, n\text{-}1,\, n)\,(a\text{-}1) + (a\text{-}l+1),$$

epperò, effettuate nella prima eguaglianza successivamente queste sostituzioni, essa si trasforma nell 'altra :

$$\beta_2^{l,0})\quad (a,\, n\text{-}l,\, n)\,(n\text{-}2) = (a,\, n\text{-}2,\, n)\,(n\text{-}l) + (a,\, n\text{-}l,\, n\text{-}2) - (n\text{-}l,\, n\text{-}2,\, n)\,(a) : \; a < n\text{-}l+1$$

Allo stesso modo dalla $\beta_1^{l,0}$) si perviene alla :

$$\beta_3^{l,0})\qquad (a,\, n\text{-}l,\, n)\,(n\text{-}3) = (a,\, n\text{-}3,\, n)\,(n\text{-}l) + (a,\, n\text{-}l,\, n\text{-}3) - (n\text{-}l,\, n\text{-}3,\, n)\,(a).$$

Infatti la formola :

$$(a,\, n\text{-}l,\, n)\,(n\text{-}3) = (a,\, n\text{-}1\; n)\,(n\text{-}l\text{-}2) + (a,\, n\text{-}l,\, n\text{-}1)\,(n\text{-}2) - (n\text{-}l,\, n\text{-}1,\, n)\,(a\text{-}2),$$

che si ottiene dalla $\beta_1^{l,0}$) moltiplicando per $(n\text{-}2)$, si trasforma nella $\beta_3^{l,0}$), quando si tenga conto delle seguenti relazioni :

$$(a,\, n\text{-}l,\, n\text{-}1)\,(n\text{-}2) = (a,\, n\text{-}l, \overline{n\text{-}1})\,(\overline{n\text{-}3}) = (a,\, n\text{-}3,\, \overline{n\text{-}1})\,(\overline{n\text{-}l}) + (a,\, n\text{-}l,\, n\text{-}3)$$
$$- (n\text{-}l,\, n\text{-}3,\, \overline{n\text{-}1})\,(\overline{a}) : \qquad a < n\text{-}l+1$$

$$(a,\, n\text{-}3,\, \overline{n\text{-}1})\,(\overline{n\text{-}l}) = (a,\, n\text{-}3,\, n)\,(n\text{-}l) - (a,\, n\text{-}1,\, n)\,(n\text{-}l\text{-}2) + (n\text{-}3,\, n\text{-}1,\, n)\,(a\text{-}l+1),$$

$$(n\text{-}l,\, n\text{-}3,\, \overline{n\text{-}1})(\overline{a}) = (n\text{-}l,\, n\text{-}3,\, n)\,(a) - (n\text{-}l,\, n\text{-}1,\, n)\,(a\text{-}2) + (n\text{-}3,\, n\text{-}1,\, n)\,(a\text{-}l+1)\,.$$

(*) Ponendo l-1 in luogo di l nella $\beta_1^{l,0}$), si ottiene la $\beta_1^{l-1,0}$).

la prima delle quali risulta dalla $\beta_2^{l-1,0}$), applicata in un $[n-1]$ di $[n]$, la seconda dalla $\beta_1^{3,0}$), moltiplicata per $(n-l+1)$, la terza dalla $\beta_1^{3,0}$), quando si ponga $a = n-l$ e quindi si moltiplichi per $(a+1)$.

Applicando successivamente k-1 volte il presente procedimento, si otterrà in generale la formola:

$$\beta_k^{l,0}) \qquad (a, n-l, n)(n-k) = (a, n-k, n)(n-l) + (a, n-l, n-k) - (n-l, n-k, n)(a);$$

$$a < n-l+1, \quad k < l.$$

18. Ecco infine come si può generalizzare completamente la $\beta_k^{l,0}$):

La si applichi per un $[n-s]$ di $[n]$, avremo:

$$(a, n-l-s, n-s)(n-k) = (a, n-l-s, \overline{n-s})(\overline{n-k-s}) = (a, n-k-s, \overline{n-s})(\overline{n-l-s})$$

$$+ (a, n-l-s, n-k-s) - (n-l-s, n-k-s, \overline{n-s})(\overline{a}); \qquad a < n-l-s+1, \quad k \leq l < n-s:$$

si ponga in essa: s in luogo di k, $k+s$ in luogo di l, indi si moltiplichi per $(n-l)$, avremo:

$$(a, n-k-s, \overline{n-s})(\overline{n-l-s}) = (a, n-k-s, n)(n-l-s) - (a, n-s, n)(n-k-l-s)$$

$$+ (n-k-s, n-s, n)(a-l);$$

si ponga invece: $a = n-l-s$, $k+s$ in luogo di l, s in luogo di k, indi si moltiplichi per $(a+s)$, avremo:

$$(n-l-s, n-k-s, \overline{n-s})(\overline{a}) = (n-l-s, n-k-s, n)(a) + (n-k-s, n-s, n)(a-l)$$

$$- (n-l-s, n-s, n)(a-k).$$

Per effetto delle due ultime la prima di queste tre relazioni si trasforma nell' altra:

$$\beta_k^{l+s,s}) \quad (a, n-l-s, n-s)(n-k) = (a, n-k-s, n)(n-l-s) + (n-l-s, n-s, n)(a-k)$$

$$- (a, n-s, n)(n-k-l-s) - (n-l-s, n-k-s, n)(a) + (a, n-l-s, n-k-s);$$

$$a < n-l-s+1, \quad k \leq l < n-s,$$

la quale è la più generale formola d' incidenza, relativa alla coppia di un punto e un piano incidenti.

Essa è di $(n + 2s + l + k\text{-}a\text{-}3)^{ma}$ dimensione, quindi, riferita ad una serie algebrica $\infty^{n+2s+l+k-a-3}$ di coppie, rappresenta una relazione tra numeri, ciascun dei quali si riferisce ad una delle condizioni fondamentali in essa scritte, esprimendo quante coppie della serie soddisfano quella condizione.

In particolare, posto $s = n\text{-}r$, $l = k - \frac{r}{2}$, con r pari $< n$, la $\beta_k^{l-s,s)}$ si riduce alla formola di $(3n\text{-}r\text{-}a\text{-}3)^{ma}$ dimensione:

$$(a, \tfrac{r}{2}, r)\,(n-\tfrac{r}{2}) = (a, \tfrac{r}{2}, n)\,(\tfrac{r}{2}) + (\tfrac{r}{2}, r, n)\,(a-\tfrac{r}{2}) - (a, r, n)\,(0); \quad a < \tfrac{r}{2} + 1,$$

la quale, nello spazio ordinario, per $a = 0$, $r = 2$, diviene la VIII) del libro dello Schubert. (*).

Per $a = 0$, $l = k$ e per i valori di l ed s, *maggiori di zero*, per cui $l + s = n - 1$, la $\beta_k^{l+s,s)}$ dà luogo alle seguenti eguaglianze di $(3n\text{-}5)^{ma}$ dimensione:

per $\begin{cases} l = 1 \\ s = n-2 \end{cases}$: $\quad (0, 1, 2)\,(n\text{-}1) = (0, 1, n)\,(1) - (0, 2, n)\,(0)$

» $\begin{cases} l = 2 \\ s = n-3 \end{cases}$: $\quad (0, 1, 3)\,(n\text{-}2)$

» $\begin{cases} l = 3 \\ s = n-4 \end{cases}$: $\quad (0, 1, 4)\,(n\text{-}3)$

. . . .

. . . .

» $\begin{cases} l = n-2 \\ s = 1 \end{cases}$: $\quad (0, 1, n\text{-}1)\,(2)$

(le eguaglianze da $l = 2$ a $l = n-2$ sono tutte $= (0, 1, n)\,(1)$.)

(*) Kalkül der abzählenden Geometrie, § 10.

dalle quali, moltiplicando rispettivamente per (n-1), si ottengono le altre di $(3n\text{-}4)^{ma}$ dimensione, cioè di dimensione massima:

$$
\left.
\begin{array}{l}
(0,1,2)\,(n\text{-}2) \\
(0,1,3)\,(n\text{-}3) \\
(0,1,4)\,(n\text{-}4) \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
(0,1,n\text{-}1)\,(1)
\end{array}
\right\} = (0,1,n)\,(0) = 1.
$$

Risultati delle osservazioni meteorologiche del 1903 fatte nel R. Osservatorio di Catania

Nota di A. RICCÒ e L. MENDOLA

551.56 (458)

Il luogo, gli strumenti meteorici, le ore di osservazione e il modo di fare le medie degli elementi osservati, sono quelli stessi adoperati negli undici anni precedenti, e se ne trova la descrizione nella nota pubblicata nel 1898 [1]): rammentiamo qui soltanto che le coordinate geografiche dell' Osservatorio sono:

Latitudine boreale . . . . . 37° 30′ 13″, 21
Longitudine Est da Greenwich . 1h 0m 18s, 9

e che il pozzetto del barometro è elevato 64, 9 m. sul livello medio del mare, e 19 m. sul suolo: gli altri strumenti meteorici circa altrettanto.

Aggiungiamo che nel novembre 1902 fu acquistato un registratore delle scariche elettriche atmosferiche del tipo BOGGIO LERA [2]) con *coherer* a palline: la sua antenna collettrice alta 6 m. è collocata sul terrazzo dell' Osservatorio, e il rimanente dell' apparecchio nella sottostante stanza insieme con gli altri strumenti.

Ancora, nell'estate 1903 è stato collocato sullo stesso terrazzo un pluviografo a galleggiante, tipo HELLMANN, di proprietà del

---

1) RICCÒ A. e SAIJA G., *Risultati delle osservazioni meteorologiche fatte nel quinquennio 1892-96 all' Osservatorio di Catania*—Atti dell' Acc. Gioenia di scienze naturali, Serie 4a Vol. XI. Catania, 1898.

2) BOGGIO - LERA E., *Sopra un apparecchio registratore delle scariche elettriche dell' atmosfera*. Ibid. Vol. XIII, 1900 — *Sui miei apparecchi segnalatori e registratori dei temporali*. Ibid. Vol. XIV, 1901. — *Un' utile modificazione del coherer per gli apparecchi segnalatori dei temporali*. Ibid. Vol. XV, 1902.

nostro R. Uffizio del Genio Civile, nel quale è allo studio la bonificazione della Piana di Catania. Il funzionamento è stato eccellente: così ci sarà possibile di intraprendere uno studio esatto sulla *intensità* della pioggia, ciò che era stato impossibile finora per la mancanza di un apparato registratore.

I quadri N. 1, 2 e 3 contengono i risultati delle osservazioni dell' anno meteorico 1903 (dicembre 1902 a novembre 1903): come ne' precedenti riassunti le temperature e pressioni barometriche non sono ridotte al livello del mare, nè queste ultime al valore normale della gravità.

Nel quadro N. 3 si aggiunge da quest' anno il numero dei giorni nei quali si sono avute abbondanti scariche elettriche atmosferiche, registrate dall' apparato su menzionato.

Nel Quadro N. 4 si trovano de' singoli elementi i valori medi dedotti dal dodicennio di osservazioni dicembre 1891 a novembre 1903, valori che consideriamo provvisoriamente come *normali*. Della temperatura si riportano nella seconda colonna i valori ridotti col calcolo al livello medio del mare: così ancora la quarta colonna contiene i valori della pressione atmosferica ridotta al livello del mare e al valore g_{45} della gravità alla latitudine di 45°.

Confrontando i valori delle stagioni e dell' anno in esame con i corrispondenti dell' anno precedente, abbiamo ottenuto il seguente specchietto:

	Temperatura dell' aria	Pressione atmosferica	Tensione del vapore	Umidità relativa	Evaporazione all' ombra	Pioggia totale	Nebulosità	Insolazione
Inverno. . .	— 1, 1	+ 3, 4	— 0, 65	— 0, 3	— 0, 07	— 9, 6	+ 12, 5	— 0. 08
Primavera . .	0, 0	0, 0	— 0, 47	— 3, 3	+ 0, 80	—107, 4	— 14, 4	— 0, 01
Estate. . . .	— 1, 0	— 0, 5	— 0, 61	— 1, 3	— 0, 14	+ 15. 9	+ 6, 7	— 0. 01
Autunno . .	— 0, 7	+ 1, 5	— 5, 33	— 6, 8	+ 0, 14	—615, 4	— 14, 8	+ 0, 02
Anno . . .	— 0, 7	+ 1. 0	— 1, 80	— 2. 3	+ 0, 26	—716, 5	+ 4, 6	— 0, 02

Sono da notare i valori della temperatura, più piccoli in quasi tutte le stagioni; quelli elevati della pressione atmosferica e della nebulosità nell' inverno; quelli più bassi della tensione e dell' umidità nell' autunno, e della nebulosità nella primavera e nell' autunno. Le divergenze poi sono grandissime nelle quantità di pioggia caduta nella primavera e nell' autunno, e ciò è dovuto tanto alla eccessiva abbondanza dell' anno precedente quanto alla scarsità di quest' anno.

Passando poi a paragonare gli stessi valori con quelli medi del dodicennio si ha quest' altro specchietto:

	Temperatura dell' aria	Pressione atmosferica	Tensione del vapore	Umidità relativa	Evaporazione all' ombra	Pioggia totale	Nebulosità	Insolazione
Inverno. . .	— 0,2	+ 3,7	— 0,26	— 1,8	+ 0,09	— 85,5	+ 2,0	— 0,03
Primavera . .	0,0	+ 0,1	— 0,27	— 2,2	+ 0,65	— 53,7	+ 5,2	— 0,06
Estate . . .	— 0,7	— 0,2	— 0,96	— 1,4	+ 0,05	— 5,8	— 4,0	— 0,07
Autunno . .	— 1,0	+ 0,6	— 4,62	— 3,6	0,00	—140,4	— 8,6	— 0,06
Anno . . .	— 0,5	+ 1,0	— 1,52	— 2,3	+ 0,21	—285,4	— 1,1	— 0,04

Da questo si ricavano conclusioni del tutto analoghe alle precedenti, eccetto che per la nebulosità, la quale si è scostata poco dalla normale. È degna poi di nota la scarsezza della quantità di pioggia in tutte le stagioni: di fatto si hanno valori presso che uguali alla metà della normale; e il valore annuale è superato, in difetto da due soltanto di quelli del trentottennio 1865-1903, e cioè da 190,5 nel 1867 e 308,6 nel 1871 [1]).

Anche nel 1903 si sono avuti dei *crepuscoli rosei*, ma generalmente deboli: alquanto più intensi nel febbraio e ne' primi di marzo: non hanno raggiunto che l' intensità 4, indicando con

[1]) MENDOLA L., *La pioggia in Catania dal 1865 al 1900* — Atti dell' Acc. Gioenia di scienze naturali, Ser. 4ª Vol. XV, pag. 64. Catania, 1902.

10 l'intensità massima dei grandi crepuscoli rosei del 1883-'4. *L'anello di Bishop* (anello di diffrazione intorno al sole) si è visto poche volte, in forma di arcone, ossia ponte a sesto rialzato sull'orizzonte al luogo del tramonto; qualche volta si è visto striato, come nel 1883-4. A sole alto in Catania non si è mai visto l'anello di Bishop; solo qualche volta si è potuta osservare fra le nubi una nebulosità rossastra sotto al sole.

Al 23 agosto a Randazzo (altit. 754 m.), occultando il sole, abbiamo visto l'anello di Bishop, sensibilmente rossastro, all'esterno, ma assai debole.

Questa diminuzione dei crepuscoli rosei nel 1903, in confronto di quelli del 1902, sembra coincidere con la diminuzione dell'opacità dell'aria che generalmente si è osservato aver avuto luogo dal 1902 al 1903.

Catania, febbrajo 1904.

Quadro N. 1 — 1903.

	Temperatura media dell'aria	Medie dei massimi diurni di temperatura, dei minimi e delle escurs.			Temperatura del sotterraneo	Temperature medie del suolo — Profondità			Temperatura acqua del pozzo
		M	m	E		0m, 20	0m, 40	0m, 60	
	o	o	o	o	o	o	o	o	o
Dicembre .	11, 1	14, 7	8, 4	*6, 3*	13, 2	10, 9	12, 1	13, 3	16, 3
Gennajo . .	10, 7	14, 6	7, 0	7, 5	12, 1	10, 0	10, 6	11, 4	16, 2
Febbrajo. .	*10, 5*	14, 6	**6, 9**	7, 7	*11, 6*	*9, 9*	*10, 6*	*11, 2*	16, 2
Marzo . . .	12, 7	16, 4	9, 2	7, 2	12, 3	12, 4	12, 8	13, 0	16, 2
Aprile . . .	14, 1	18, 5	10, 0	8, 4	12, 9	14, 7	15, 2	15, 2	16, 1
Maggio . .	19, 1	22, 8	15, 0	7, 7	15, 3	18, 2	18, 8	18, 4	16, 1
Giugno . .	21, 3	25, 2	17, 1	8, 0	17, 6	23, 0	23, 2	22, 8	16, 2
Luglio. . .	25, 1	29, 1	20, 3	**8, 8**	19, 7	26, 8	27, 1	26, 4	16, 3
Agosto. . .	**26, 6**	**30, 6**	22, 0	8, 6	21, 6	**28, 1**	**28, 5**	**28, 0**	16, 3
Settembre .	23, 2	26, 6	19, 8	6, 8	**21, 6**	25, 3	26, 0	26, 0	16, 3
Ottobre . .	19, 8	23, 9	16, 0	7, 9	20, 1	19, 7	20, 8	20, 9	16, 3
Novembre .	14, 4	17, 9	11, 2	6, 7	16, 5	15, 0	16, 0	16, 4	16, 3
Inverno . .	10, 8	14, 6	7, 5	7, 2	12, 3	10, 3	11, 1	12, 0	16, 2
Primavera .	15, 3	19, 2	11, 4	7, 8	13, 5	15, 1	15, 6	15, 5	16, 1
Estate . . .	24, 4	28, 3	19, 8	8, 5	19, 7	26, 0	26, 2	25, 7	16, 3
Autunno. .	19, 1	22, 8	15, 7	7, 1	19, 1	20, 0	20, 9	21, 1	16, 3
Anno . . .	17, 4	21, 2	13, 5	7, 7	16, 2	17, 8	18, 5	18, 6	16, 2

Quadro N. 2 — 1903.

	Pressione atmosferica	Tensione del vapore acqueo	Umidità relativa	Evaporazione all' ombra	Pioggia totale	Nebulosità	INSOLAZIONE A	INSOLAZIONE B	INSOLAZIONE A/B
	mm	mm		mm	mm		h	h	
Dicembre .	756. 7	7. 07	**66. 7**	2. 21	**95, 4**	53. 8	*100. 1*	296. 5	*0. 34*
Gennajo . .	762. 4	6, 70	66. 7	*1. 76*	20. 3	**58. 8**	110. 2	305, 1	0. 36
Febbrajo. .	**763, 0**	6, 30	63. 0	1, 98	27, 2	36. 3	167. 1	*301, 0*	0, 56
Marzo . . .	758, 1	7, 39	64, 1	2, 39	28, 9	18. 9	165. 0	370. 1	0. 45
Aprile . . .	*752,6*	7. 04	56, 3	1, 02	11, 7	15. 3	176, 5	394. 4	0. 45
Maggio . .	755. 6	9. 71	57, 0	3. 99	8. 7	53. 8	181, 7	438, 1	0, 41
Giugno . .	754. 8	11, 05	56. 8	3. 97	11. 7	32. 8	189. 5	439. 9	0, 43
Luglio. . .	756. 3	11, 38	*46, 7*	5. 44	4. 2	8. 3	230. 8	**446. 6**	0. 65
Agosto. . .	756. 7	**13, 12**	*48. 8*	**5, 85**	*0. 0*	*1. 7*	**302. 6**	419. 0	**0. 72**
Settembre .	758. 8	12, 97	59, 5	3. 91	23. 9	25, 1	153. 9	370, 8	0, 42
Ottobre . .	757. 4	10, 88	60, 2	3. 86	30, 3	30. 6	172. 8	345. 8	0. 50
Novembre .	757. 4	8. 53	65, 2	1. 81	61. 6	47. 2	115. 6	303. 1	0. 38
Inverno . .	760. 6	6, 70	65. 5	1. 99	142, 9	50, 1	377. 7	902. 6	0, 42
Primavera .	755. 4	8, 06	59, 3	3. 46	52. 3	49. 4	523. 2	1203. 2	0, 43
Estate . . .	756, 0	11, 90	50, 7	5, 10	15, 9	14, 0	782. 9	1305. 5	0, 60
Autunno. .	757, 9	7, 13	61, 6	3, 20	115, 8	34, 3	442, 3	1019. 7	0, 43
Anno. . . .	757, 4	8, 46	59. 2	3, 45	326. 9	36, 9	2126. 1	4431, 0	0, 48

Quadro N. 3 — 1903.

		Inverno	Primavera	Estate	Autunno	Anno
Frequenza della calma e dei venti	C.	11	39	56	10	176
	N.	10	3	1	8	22
	NE	7	17	16	12	52
	E.	6	9	9	6	30
	SE	0	1	2	1	4
	S.	1	0	0	3	4
	SW.	18	4	4	15	41
	W	7	17	4	5	33
	NW	0	2	0	1	3
Meteore acquee — numero dei giorni	sereni	26	26	71	31	154
	misti	39	41	19	40	139
	coperti . . .	25	25	2	20	72
	con pioggia .	27	28	8	26	89
	con grandine.	2	0	0	0	2
	con nebbia. .	4	6	0	4	14
	con brina . .	0	0	0	0	0
	con temporale	3	4	3	6	16
	con scariche elettriche	17	39	25	11	92

ESTREMI METEOROLOGICI ANNUI OSSERVATI		Massimo	Minimo
Temperatura dell' aria		34, 2 16 luglio	1, 9 25 dicembre
Temperatura del sotterraneo		22, 7 2 settembre	9. 1 20 febbraio
Temperatura del suolo	0m, 20	29. 0 16 agosto	7. 0 26 dicembre
	0m, 40	29. 3 16-17 agosto	9. 0 27 dicembre
	0m, 60	28. 3 16-20 agosto	10. 9 27-28 dic.
Temperatura acqua del pozzo		16. 4 30 novembre	16. 0 28 aprile
Pressione atmosferica		772, 3 9 febbr. 9h	740, 7 30 nov. 15h
Tensione vapore acqueo		20. 53 13 sett. 21h	2. 37 17 febb. 21h
Umidità relativa		95 28 mar. 21h	18 12 apr. 15h
Evaporazione all' ombra		11. 67 11 ottobre	0, 15 8 dicembre
Velocità oraria del vento		33 Km N 23 dic. 14h	—

Quadro N. 4 — Medie 1892-1903.

	Temperatura dell' aria		Pressione atmosferica		Tensione del vapore acqueo	Umidità relativa	Evaporazione all' ombra	Pioggia totale	Nebulosità	Insolazione
	all' osservatorio	ridotta al mare	all' osservatorio	rid. al mare e a g 45						
	o	o	mm	mm	mm		mm	mm		
Gennajo . .	*10, 2*	*10, 6*	757, 3	762, 8	*6, 50*	65, 9	*1, 83*	61, 7	45, 7	0, 46
Febbrajo .	11, 0	11, 4	756, 5	762, 0	6, 86	66, 4	1, 99	66, 6	48, 7	0, 46
Marzo . . .	12, 6	13, 0	755, 3	760, 7	7, 27	61, 1	2, 31	46, 6	46, 7	0, 48
Aprile . . .	15, 0	15, 5	*755, 1*	*760, 4*	8, 26	62, 6	2, 69	38, 4	46, 2	0, 46
Maggio . .	18, 4	18, 8	755, 6	760, 8	9, 46	57, 9	3, 43	21, 0	39, 6	0, 52
Giugno . .	22, 8	23, 1	756, 1	761, 3	11, 64	52, 8	4, 51	6, 4	25, 9	0, 61
Luglio . . .	**26, 2**	**26, 6**	755, 9	761, 0	12, 93	*48, 5*	**5, 55**	*2, 0*	*11,2*	**0, 71**
Agosto. . .	26, 2	26, 5	756, 5	761, 6	**14, 02**	54, 0	5, 11	13, 3	16, 8	0, 68
Settembre .	24, 1	24, 5	757, 2	661, 5	13, 29	58, 6	4, 50	54, 0	28, 8	0, 56
Ottobre . .	20, 6	21, 0	757, 2	762, 5	12, 27	66, 3	3, 05	87, 3	47, 5	0, 47
Novembre .	15, 6	16, 0	**757, 5**	**762, 8**	9, 68	**70, 7**	2, 05	**114, 9**	**52, 3**	0, 43
Dicembre .	11, 8	12, 1	756, 8	762, 2	7, 54	69, 5	1, 89	100, 1	49, 9	*0, 42*
Inverno . .	11, 0	11, 4	756, 9	762, 3	6, 96	67, 3	1, 90	228, 4	48, 1	0, 45
Primavera .	15, 3	15, 7	755, 3	760, 6	8, 33	61, 5	2, 81	106, 0	44, 2	0, 49
Estate . . .	25, 1	25, 4	756, 2	761, 3	12, 86	52, 1	5, 05	21, 7	18, 0	0, 67
Autunno. .	20, 1	20, 5	757, 3	762, 5	11, 75	65, 2	3, 20	256, 2	42, 9	0, 49
Anno . . .	17, 9	18, 3	756, 4	761, 6	9, 98	61, 5	3, 24	612, 3	38, 3	0, 52

Eruzioni e Pioggie.

Nota di A. RICCÒ

Indubbiamente l'acqua ha una grande parte nel funzionamento dei vulcani: masse enormi ne vengono lanciate fuori, sia allo stato di vapore, sia di fango, sia di acqua bollente: anche le lave già eruttate emettono grandi quantità di vapore acqueo.

Inoltre da alcuni è ritenuto che l'acqua determini le eruzioni penetrando nei focolari vulcanici, sia dal mare, sia per mezzo delle pioggie. Alcuni anni fa quest' ultima ipotesi è stata discussa in relazione alle recrudescenze delle eruzioni vesuviane dai prof. G. De Lorenzo ed E. Semmola in seno alla R. Accademia delle Scienze di Napoli, ammettendo l'uno l'influenza diretta delle acque di pioggia cadute sul vulcano e filtranti sino a contatto colla lava incandescente (1) e l'altro soltanto l'azione delle acque circolanti sotterra (2).

Ho voluto cercar di vedere anch' io quel che risulta, mettendo in relazione le eruzioni etnee colla pioggia.

Ho cominciato dall'ultima grande eruzione, quella del 1892, che, essendosi svolta nel versante meridionale dell'Etna e perciò proprio in faccia all' Osservatorio ed alla portata dei nostri potenti cannocchiali, ha potuto essere seguita da noi giorno e notte in tutte le fasi della sua lunga durata, che fu di quasi 6 mesi: talchè si è in grado anche di fare un confronto rigoroso

(1) Dott. G. De Lorenzo — *Sulla probabile causa dell' attuale attività del Vesuvio.* Rendiconti della R. Acc. delle Scienze di Napoli; Maggio 1900.

(2) Prof. E. Semmola — *Le Pioggie ed il Vesuvio.* Ibid.; Agosto e Dicembre 1900 e Marzo 1901.

delle alternative numerose di attività colle cadute di pioggia: di queste abbiamo considerato solo quelle di 10 mm. o più, ritenendo che le minori non possano penetrare a molta profondità e produrre sensibili effetti.

Ed ecco questo confronto:

27 agosto: pioggia 27.8 mm. Attività eruttiva mediocremente crescente, stazionaria nel giorno seguente, decrescente nel 3° giorno.

13 settembre: pioggia 12.3 mm. Attività crescente, fortemente crescente nel 2° giorno, poi stazionaria.

20 settembre: pioggia 13.6 mm. Attività stazionaria, stazionaria anche nei due giorni seguenti.

10 ottobre: pioggia 10.1 mm. Attività non potuta determinare, stazionaria nei due giorni seguenti.

18 ottobre: pioggia 15.0 mm. Attività decrescente, stazionaria nei due giorni seguenti.

11 novembre: pioggia 17.6 mm. Attività decrescente anche nei due giorni seguenti.

27 novembre: pioggia 26.3 mm. Attività eruttiva mediocremente crescente, stazionaria nei due giorni seguenti.

14 dicembre: pioggia 75.5 mm.! Attività stazionaria, decrescente nei due giorni seguenti.

28 dicembre: pioggia 28.0 mm. Eruzione *finita* in questo giorno.

Riassumendo, si ha:

Attività Eruttive	*Nel giorno della pioggia*	*Nel 2° giorno*	*Nel 3° giorno*
Crescente	3	1	0
Stazionaria	2	6	6
Decrescente	3	2	3
Indeterminata . . .	1		

Si vede che i casi di attività crescente dopo la pioggia circa si bilanciano con quelli di attività decrescente, e che pre-

valgono i casi di attività stazionaria dopo la pioggia; e che neppure la straordinaria pioggia del 14 dicembre produsse risveglio di attività eruttiva.

Non risulta dunque una influenza immediata od a breve scadenza della pioggia sull'eruzione del 1892.

Ma questo studio può farsi sopra base più larga, facendovi contribuire tutte le eruzioni etnee di cui si conosce la data, ed osservando come sono avvenute in relazione al periodo annuo della pioggia, che, come è noto, in Sicilia è ben determinato, perchè si ha una stagione affatto asciutta ed una stagione piovosa; per simmetria dividendo l'anno in due semestri, l'uno contenente i mesi più scarsi di pioggia, l'altro quelli piovosi, si ha:

Semestre asciutto: Aprile a Settembre.
Semestre piovoso: Ottobre a Marzo.

Riguardo alle eruzioni etnee, oltre quelle che diedero luogo alla prima formazione del vulcano, avvenute in epoca geologica precedente l'attuale, secondo l'Alessi sono citate (1):

5 eruzioni preistoriche o mitologiche, preelleniche ed elleniche, le quali diedero occasione ai miti relativi ai Titani, ad Encelado, a Proserpina, a Fetonte, a Bacco, ad Ercole, ecc.

16 eruzioni storiche, di cui anche l'anno è incerto, ed appartengono specialmente all'epoca greca della Sicilia.

14 eruzioni storiche di cui si conosce l'anno: sotto l'impero romano.

21 eruzioni ricavate dai classici, delle quali è dato solo l'anno.

13 eruzioni ricavate da varî autori.

69 eruzioni di data certa, cioè di cui è dato sempre l'anno, talora il mese, ed il giorno, dal 1169 in poi.

Sarebbero dunque in tutto 138 eruzioni più o meno note:

(1) *Storia critica delle Eruzioni dell'Etna.* Atti dell'Acc. Gioenia Tomo IX. 1835, p. 207.

ma di sole 62, dal 1169 in poi si conosce il mese in cui scoppiarono, lasciando quella del 253 che è isolata, quantunque si sappia che avvenne nel febbraio.

Segue nella tabella l'elenco delle eruzioni raccolte dalle migliori fonti, cioè dall' Alessi, dal Ferrara, dal Recupero, ecc.

Anno	Mese	Giorno del principio dell' eruzione	Anno	Mese	Giorno del principio dell' eruzione
253	febbraio	1	1610	febbraio	6
1169	febbraio	1 o 2	1613	ottobre	?
1285	gennaio	7 o 17 (1)	1614	luglio (2)	1
1323	giugno	30	1633	febbraio	21
1329	giugno	28	1634-36	dicembre	18
1329	luglio	15	1640	febbraio	?
1333	?	?	1643	febbraio	?
1381	agosto	5 o 6	1646	novembre	20
1408	novembre	9	1651	febbraio	?
1444	?	?	1669	marzo	11
1446	settembre	25	1682	settembre	?
1447	settembre	21	1688	aprile ?	?
1470	?	?	1689	marzo	14
1494	?	?	1693	gennaio	11
1536	marzo	22-23	1702	marzo	8
1537	marzo	11	1727	novembre	20
1566	novembre	1	1732	dicembre	10
1579	settembre	9	1735	ottobre	11
1580	?	?	1741	?	?
1603	luglio	?	1747	settembre	?
1607	giugno	28	1752-4	?	?

(1) Quest' eruzione si disse contemporanea alla morte del Re Carlo I, la quale avvenne al 7 gennaio, ma la notizia giunse a Catania solamente 10 giorni dopo: tanto ho saputo dal Chiarissimo Collega prof. V. Casagrandi Orsini.

(2) L' efflusso della lava di questa eruzione durò 10 anni.

Anno	Mese	Giorno del principio dell' eruzione	Anno	Mese	Giorno del principio dell' eruzione
1755	marzo	?	1838	agosto	8
1758-9	ottobre	?	1842	novembre	27
1759	aprile	14	1843	novembre	17
1763	febbraio	6	1852	agosto	22
1766	aprile	26	1863	luglio	8
1780	maggio	18	1865	gennaio	30
1787	luglio	1	1868	dicembre	8
1792	marzo	nei primi	1869	settembre	26
1802	novembre	15	1874	agosto	29
1805	luglio	11	1879	maggio	25
1809	marzo	27	1883	marzo	22
1811	ottobre	27	1886	maggio	18
1819	maggio	27	1892	luglio	8-9
1832	ottobre	31	1899	luglio	19 e 25

Naturalmente questo elenco non può esser completo, perchè nei tempi antichissimi (e forse più durante le tenebre d' ignoranza nel medio evo) l' Etna era più oggetto di terrore anzichè di studio: sia per le spaventose sue conflagrazioni, sia per la superstizione ed il mistero religioso di cui pagani e cristiani circondavano il vulcano, sia per la cintura di foreste, presso che impenetrabili, formate di alberi colossali, dei quali ora restano pochi campioni celebri, come il *Castagno dei cento cavalli*, ormai decrepito e cadente.

Si ha poi la prova della incompletezza dell' elenco nel fatto che il numero delle eruzioni registrate è scarsissimo o nullo nei primi secoli, e poi va rapidamente aumentando, avendosi:

Secoli	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX
Eruzioni	1	1	5	6	5	16	16	20

mentre in generale tutti i vulcani tendono alla estinzione, e quindi le loro eruzioni più probabilmente debbono andar diminuendo di frequenza.

Ad ogni modo, passiamo a studiare la distribuzione nei mesi, nelle stagioni e nei due semestri, come si è detto sopra, per le 58 eruzioni di cui è noto il mese dello scoppio; considerando che le eruzioni dell' Etna sono fenomeni grandiosi visibili a grande distanza, per cui non vi è ragione di credere che siano state tralasciate quelle di una stagione, piuttosto che di un' altra, tanto più che siamo in un paese ove le vicende climatiche sono assai miti.

La distribuzione delle eruzioni per mesi dell'anno meteorico ci dà:

Dicembre	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Sett.	Ottobre	Nov.
3	3	7	9	3	4	3	8	1	6	5	7
	Inverno 13			Primavera 16			Estate 15			Autunno 18	

Semestre asciutto: Aprile a Settembre 28 eruzioni

Semestre piovoso: Ottobre a Marzo 34 eruzioni

Considerando i semestri, si ha veramente una prevalenza sensibile delle eruzioni nel più piovoso; ma se si guarda la distribuzione nelle stagioni, si trova che il numero delle eruzioni è minimo nell' inverno, che in Catania ed in Sicilia è la stagione più piovosa. Ma questo risultato contradittorio col detto prima, potrebbe spiegarsi col fatto che nell' inverno, ed in parte della primavera, sopra circa la metà superiore del vulcano invece di pioggia cade neve, la quale permane sul suolo senza fondersi e senza penetrarvi; ma poi allo sciogliersi delle nevi nella seconda metà della primavera e nel principio dell' estate si dovrebbe avere la maggior frequenza delle eruzioni, e ciò non è, perchè in primavera, estate ed autunno si ha prossimamente la stessa frequenza delle eruzioni.

Guardando poi ai mesi, si hanno massimi di frequenza delle eruzioni in marzo, luglio, e novembre, cioè in condizioni pluviali affatto diverse cioè: con neve in Marzo, siccità in Luglio, pioggie abbondanti in Novembre.

E così pure si hanno minimi di frequenza delle eruzioni in dicembre, gennaio, aprile e giugno, pure in condizioni affatto diverse riguardo alle idrometeore.

Dunque neppure da queste statistiche pare risulti dimostrato che la pioggia abbia una influenza immediata od a corta scadenza sulle eruzioni.

Nè si potrà dire che la pioggia eserciti la sua influenza con un certo ritardo sulle eruzioni, occorrendo del tempo per penetrare fino ai focolari vulcanici ed eccitarvi le eruzioni; perchè allora se il ritardo è di mesi o di stagioni si dovrebbe trovare nelle eruzioni il periodo annuo stesso delle pioggie, ma solo spostato in ritardo, il che non si verifica; perchè anzi il semestre piovoso è quello che dà maggior numero di eruzioni, come se non vi fosse ritardo, e dopo le abbondanti pioggie e la fusione delle nevi della primavera, in estate ed autunno si hanno altrettante eruzioni quanto nella primavera stessa.

Se poi il ritardo sia anche maggiore, allora per il dimorare e l' immagazzinarsi dell'acqua nelle cavità del suolo, scomparirà l' influenza dell' avvicendarsi delle stagioni, e si potrà trovare solo che le eruzioni seguono gli anni piovosi con ritardo di un certo numero di anni.

Dalle osservazioni dei giorni piovosi tenute da C. Gemmellaro dal 1816 al 1826 risultano più piovosi a Catania e Nicolosi i seguenti anni, ai quali metteremo di contro gli anni delle eruzioni che seguirono, si ha:

Anni piovosi	1817	eruzione al	1819:	ritardo	2	anni
id.	1820	id.	1832	»	12	»
id.	1823	id.	1832	»	9	»
id.	1826	id.	1832	»	6	»

Per l'anno piovoso 1817 si ha un ritardo dell'eruzione di 2 anni, ma per gli altri anni piovosi non vi sono eruzioni seguenti, se non quella del 1832, che dà un ritardo minimo di anni 6; quindi nulla può ricavarsi da questo confronto.

Dal 1832 al 1859 furono fatte bensì osservazioni pluviometriche all'Università di Catania, ma sia per le molte lacune, sia forse per l'irregolare funzionamento dello strumento, non si può ricavarne alcun dato sicuro. Si aggiunga che appunto negli anni 1832 e 1838 in cui vi furono eruzioni, le osservazioni pluviometriche sono incomplete; e negli anni 1842, 1843, 1852, 1863, in cui avvennero pure delle eruzioni le osservazioni pluviometriche non furono fatte.

Per completare in qualche modo questo confronto possiamo valerci della lunga serie di osservazioni pluviometriche dell'Osservatorio di Palermo che comincia dal 1806 (1). La distanza fra Palermo e Catania (165 km.) non è così grande da cambiare il carattere delle annate dal punto di vista delle pioggie, tanto più che in Sicilia le meteore idriche, essendo prevalentemente invernali, non sono fenomeni locali, ma bensì portate dai vasti cicloni o depressioni barometriche che attraversano l'Europa (2).

Si ha dunque:

Anni piovosi	in Palermo		1808	Eruzione al	1809	ritardo	1	anni
id.	id.		1808	id.	1811	»	3	»
id.	id.		1814	id.	1819	»	5	»
id.	id.		1816	id.	1819	»	3	»
id.	id.	*f*	1820	id.	1832	»	12	»
id.	id.		1823	id.	1832	»	9	»
id.	id.		1831	id.	1832	»	1	»
id.	id.	*f*	1835	id.	1838	»	3	»
id.	id.		1840	id.	1842	»	2	»
id.	id.		1843	id.	1843	»	0	»
id.	id.		1849	id.	1852	»	3	»
id.	id.	*f*	1853	id.	1863	»	10	»
id.	id.		1858	id.	1863	»	5	»
id.	id.		1863	id.	1863	»	0	»

(1) Lo studio della pioggia in Palermo è stato fatto successivamente da Cacciatore, Tacchini, Millosevich e De Lisa.

(2) Dobbiamo dire però che il rapporto della quantità di pioggia nelle due stazioni non è costante nei diversi anni, e quindi questo confronto non può avere che un valore limitato.

Abbiamo indicato con una *f* le annate fortemente piovose (pioggia > 750 mm.).

Anche qui non abbiamo alcuna regolarità nel ritardo delle eruzioni rispetto agli anni piovosi, e neppure rispetto ai molto piovosi, che più certamente lo furono anche per le regioni etnee.

Finalmente al 1868 furono istituite regolari osservazioni pluviometriche nell' Università di Catania, le quali poi sono state diligentemente e coscienziosamente discusse e pubblicate dal D.r L. Mendola (1).

Se ne ricavano con sicurezza gli anni più piovosi in Catania dal 1865 in poi, cioè quelli che dànno dei massimi della quantità di pioggia: abbiamo distinto (come prima) i massimi più forti colla lettera *f*.

f	1873-4	eruzione al	1874 e 1879 :	ritardo	0 o 5	anni
	1877	»	» 1879 e 1883	»	2 o 6	»
f	1880-1	»	» 1883 e 1886	»	3 o 5	»
	1883-4	»	» 1883 e 1886	»	0 o 2	»
	1887	»	» 1892	»	5	»
	1889-90	»	» 1892	»	2	»
f	1894	»	» 1899	»	5	»
	1896	»	» 1899	»	3	»
f	1898	»	» 1899	»	1	»

Scegliendo opportunamente le eruzioni seguenti gli anni piovosi, si può trovarne cinque le quali seguono col ritardo di 5 a 6 anni; ma evidentemente il confronto così fatto è troppo artificioso, perchè se ne possa concludere qualche cosa di positivo.

Tentiamo anche di cercare la relazione fra pioggie ed eruzioni, in senso inverso, ossia vediamo se le eruzioni sieno state precedute da anni piovosi o meno; si ha:

Eruzione del 1874 abortita: pioggie grandi nel 1873 e 1871.
» » 1879 notevole: pioggie scarse nel 1878 e 1879.
» » 1883 abortita: pioggie scarse nel 1882, maggiori della media nel 1883.
» » 1886 grande: pioggia normale nel 1885, maggiore nel 1886.
» » 1892 grande: pioggia poco superiore alla normale nel 1891 e 1892.
» » 1899 centrale: pioggie grandi nel 1898, poche nel 1899.

(1) *Atti dell' Acc. Gioenia* Vol. XV, Serie IV, 1902.

Abbiamo soltanto l' eruzione breve e piccola del 1874 e l'eruzione centrale nel 1899 di solo fumo e lapilli e quasi istantanee, precedute da grandi pioggie.

Finalmente dobbiamo notare che abbiamo avuto negli ultimi anni casi di pioggie strabocchevoli, non seguite da alcuna eruzione. Infatti nel Settembre 1902 si ebbe 469 mm. di pioggia, cioè quasi la pioggia normale di tutto l'anno: nell' Ottobre seguente la pioggia fu 239.5 mm. anch'essa enormemente superiore alla media del mese (66 mm.): e non è seguita finora alcuna eruzione. Nella 1ª decade del 1904 la pioggia è stata di 223 mm., cioè circa *10 volte la normale*, e finora (giugno 1904) non si è verificata alcuna eruzione.

Pare dunque che dall' esposto si possa concludere che le pioggie non hanno influenza a determinare le eruzioni dell'Etna.

Certamente la percolazione dell' acqua meteorica attraverso le falde dei vulcani ed attraverso il terreno attiguo si fa lentamente e viene regolarizzata e resa continua dalle cavità che incontra ed ove si raccoglie; come del resto accade per l' acqua che alimenta le comuni sorgenti. D' altronde è noto che nelle caverne ha luogo stillicidio continuo in tutte le stagioni, e ciò si verifica pure nelle grotte vulcaniche, come in quella *delle Colombe* ed in quella *degli Archi* sull' Etna, ed anche a non molti metri di profondità.

Perciò le acque di pioggie non possono arrivare ai focolari vulcanici che in modo continuo e regolare e quindi non possono essere causa determinante delle eruzioni o dei parossismi vulcanici.

Ma di fronte alla antica scuola dei *nettunisti*, i quali ammettono che le acque del mare o delle pioggie producano le eruzioni, sta la scuola più recente dei *plutonisti* i quali ritengono che le eruzioni siano prodotte semplicemente dal calor interno della terra, senza intervento di acqua dall'esterno, cioè dall' atmosfera o dal mare; anzi alcuni vanno più avanti; ed alla testa di essi sta l'illustre geologo Prof. E. Suess, il quale ritiene che le acque, ed

attualmente almeno una parte: quelle che egli chiama acque *giovanili*, acque nuove, acque vulcaniche, provengono direttamente dai gaz e vapori che si svolgono dalle lave o dal magma interno (*Entgassung*), e che quindi prendono parte per la prima volta alla circolazione idrica terrestre; mentre egli chiama acque *guadose (vadose)* le acque dei mari, dei fiumi, ecc., le quali da tempo fanno parte della detta circolazione.

Certamente in origine le acque tutte provennero dal raffreddamento e condensazione del vapor acqueo dell' atmosfera, abbandonata dal globo terrestre incandescente, quando cominciò a consolidarsi: quindi l' origine ignea o plutonica dell' acqua è fuori di dubbio.

Ma anche attualmente, senza parlare dei vulcani di fango (la cui acqua dai *nettunisti* si vorrebbe far venire dal mare), ovunque sui vulcani, ove il vapor acqueo delle fumarole può condensarsi, si ha produzione più o meno abbondante d' acqua giovanile. Così a *Vulcarolo* presso l'Osservatorio Etneo (1), il fumo condensandosi, distilla, e si sente l' acqua cadere a goccie nel fondo di quel piccolo cratere, che ne contiene sempre alquanta.

A Stromboli vi è una piccola sorgente d' acqua, a metà del versante Est del vulcano, detta la *Schicciola*, evidentemente prodotta dalla condensazione del vapor acqueo dello Stromboli stesso.

Nelle *Favare*, grandi fumarole di Pantelleria, gli indigeni favoriscono la condensazione del vapor acqueo, mettendo degli sterpi obliquamente sulle bocche esalanti, con che l' acqua di condensazione percola in piccoli bacini, che servono a dissetare le greggi e talora anche gli uomini.

Ma tornando al nostro argomento della relazione fra eruzioni e pioggie, possiamo domandarci: poichè non risulta che le pioggie producono le eruzioni, può darsi che le eruzioni de-

(1) Se si facesse la spesa di una conduttura di 300 m. per portare il vapore di Vulcarolo all' Osservatorio Etneo, si avrebbe per condensazione l'acqua ed il calore che ora ci procuriamo a stento, fondendo neve e consumando molto combustibile.

terminino le pioggie? Domanda che avrebbe dal lato pratico un nesso intimo colla ancora dibattuta questione della influenza degli spari sulla grandine.

Il Sarasin recentemente ha emessa l'opinione che l'epoca glaciale sia stata prodotta dalle frequenti e violentissime eruzioni d'allora, che avrebbero ingombrato di ceneri l'atmosfera, producendo impedimento alla radiazione solare, e copiosissima condensazione del vapor acqueo atmosferico: donde freddo intenso e nevi abbondantissime, che avrebbero coperto fin l'Europa di parecchie centinaia di metri di ghiaccio.

Per rispondere direttamente alla domanda se le eruzioni determinino la pioggia, cominciamo dal caso semplice dell'eruzione del 1892. Come abbiamo già detto l'estate in Sicilia è quasi priva di pioggia: sarà quindi facile vedere se l'eruzione ne ha prodotta, come si potrà vedere se in generale nei mesi dell'eruzione la pioggia fu maggiore del solito; abbiamo infatti:

MESI *dell'eruzione del 1892*	PIOGGIA		
	Normale	1892	Differenza 1892 — N
Luglio	2.3	4.0	+ 1.7
Agosto	8.5	29.0	+ 20.5
Settembre	31.0	43.0	+ 12.0
Ottobre	66.3	51.8	— 14.5
Novembre	90.1	55.5	— 34.6
Dicembre	86.2	91.5	+ 5.3
Totale. . . .	284.4	274.8	— 9.6

Le differenze mensili, quantunque positive nei primi tre mesi, sono piccole, discordanti, inconcludenti nell'insieme; nel totale del periodo dell'eruzione la pioggia è anzi stata alquanto più scarsa del solito, e ciò malgrado le enormi colonne di fumo, la cui cenere spesso arrivava fino a Catania ed anche assai più lungi, ed i vapori arrivavano molto al disopra della cima dell'Etna, cioè oltre l'altitudine di 3000 m. e malgrado le poten-

tissime detonazioni che facevano tremare le invetriate in Catania. E dopo ciò si potrà credere all' efficacia degli spari di minuscole artiglierie a far dissolvere in pioggia le nubi temporalesche ?

Ma consideriamo la cosa più in generale: vediamo cioè se le eruzioni sono state accompagnate o seguite da mesi o stagioni piovose, ed anche qui per ora non potremo considerare che gli anni posteriori al 1865; abbiamo :

Data e durata dell' eruzione	Differenza della pioggia colla media in millimetri	
	per mesi	per stagioni
1865 : Gennaio 30 a Giug. 30	Febbraio ? , Marzo ? Aprile — 34 , Maggio — 17 Giugno — 2 , Luglio — 2	Estate — 13, Autunno + 80
1868 : Dicembre 8	Dicem. — 71 , Genn. + 4	Inverno (1869) : — 132
1869 : Sett. 26	Settem. — 25 , Ottob. — 42	Autunno — 38
1874 : Agos. 29 a Sett. 1 .	Settem. — 31 , ...	Autunno — 27
1879 : Mag. 25 a Giug. 5 .	Giugno — 7 , ...	Estate — 106
1883 : Marzo 23 a 26. . .	Marzo + 39 , Aprile + 26	Primavera + 48
1886 : Mag. 18 a Giug. 5 .	Mag. — 6 , Giugno — 1	Estate — 1
1892 : Luglio 8 a Dic. 8. .	Luglio + 2 , Agosto + 20 Settem. + 12 , Ottobre — 15 Novem. — 35 , Dicem. + 5 Genn. — 41 , ...	Inverno — 100
1899 : Luglio 19 a 25. . .	Luglio — 2 , Agosto + 26	Estate + 17

In generale si vede che, nè durante le eruzioni, nè dopo, nè per mesi, nè per stagioni, si ebbe pioggia maggiore della normale, anzi più spesso fu scarsa, cioè in 15 mesi su 23 considerati, ed in 6 stagioni, sopra 8 considerate.

Possiamo dunque concludere che *le pioggie non determinano le eruzioni etnee*, *e che queste reciprocamente non determinano le pioggie.*

Azione Fisiologica del Potassio

del Prof. ANTONIO CURCI

Dando uno sguardo alla bibliografia scientifica su quanto si è fatto relativamente all' azione fisiologica e terapeutica del potassio e del sodio, e guardando come i diversi Trattati di Materia Medica riassumono le conoscenze su tale argomento, si deduce in generale che il potassio (s' intende sotto forma di sale: carbonato, fosfato, solfato, nitrato, cloruro, bromuro, ioduro e acetato, tartrato, citrato e solfometilato, solfo-etilato, solfopropilato, solfo-butilato, solfoamilato ecc.) iniettato nella vena o sotto la cute secondo l' animale, vi determina l' arresto del cuore e perciò la morte dei centri nervosi per l' arresto improvviso della circolazione del sangue; mentre il sodio (sotto le stesse forme di sali) anche a gran dose non eserciterebbe alcuna azione sul cuore e sull' organismo.

Da ciò ne è risultato l' uso nella pratica medica di escludere dai medicamenti i farmaci a base di potassio e sostituirli con quelli di sodio; p. e. dapprima si usava comunemente il bromuro ed il joduro di potassio ed oggi dai Clinici e Medici pratici viene consigliato ed usato invece il joduro di sodio, e qualunque altro bromuro che non sia di potassio.

Le mie ricerche mi portano a fare vedere che ciò è erroneo, ma anzi contrario al vero e quella conclusione è la conseguenza di esperienze mal fatte e male interpretate.

Infatti riguardo all' azione biologica non è affatto vero che il potassio abbia azione debilitante e paralizzante sul cuore, ma invece come dimostrerò ha notevole azione eccitante sulla fibra muscolare cardiaca e vasale se a piccole dosi, iniettate nella vena

con prudenza e cautela lentamente in soluzioni non concentrate; ma che in soluzione concentrata alla dose di 1 a 2 o 3 grammi in una volta nella giugulare, come hanno fatto alcuni precedenti sperimentatori, determina un rapido arresto del cuore, s' intende per un' azione rapida intensa alterante del sale potassico sulla composizione chimica della fibra muscolare. Per la via del sangue dopo assorbimento della mucosa gastroenterica, l' azione è graduata, lenta, normale, ricostituente e non alterante come quando s' inietta nelle vene.

Così il sodio non è indifferente ed inattivo, sol perchè iniettato alla dose di 3 a 4 grammi non fa arrestare il cuore come fa il potassio. Esso ha un' azione generale eccitante il sistema nervoso-cerebro-spinale animale e vegetativo, che si manifesta notevolmente con intense convulsioni alla dose di 2 grammi di sale sodico per chg. di animale e con l' eccitamento del cuore e aumento della pressione sanguigna, senza aversi arresto di questo organo, se non quando si sia giunti ad iniettare almeno 5 o 6 grammi per chg.

Lo si vede che è quistione di dose relativa: il potassio a centigrammi, il sodio a grammi, quello eccita la fibra muscolare cardiaca e vasale, questo eccita la cellula e la fibra nervosa animale e vegetativa.

Perciò da questo previo annuncio si vede come le idee ammesse e professate dai Farmacologi, sull'azione biologica del potassio e del sodio sieno incomplete e sbagliate, ed io passerò a dimostrare con esperienze dirette e proprie qual' è la vera azione di questi due metalli.

Del pari sbagliati sono i criteri di volere sostituire ai sali di potassio quelli di sodio per evitare l' azione debilitante del potassio sul cuore; primo, perchè l' azione terapeutica evidente che esercita il joduro di potassio, non manifesta affatto il ioduro di sodio, il quale si mostra in pratica poco efficace e molto meno di quello potassico; secondo, perchè i sali di potassio per la via dello stomaco non possono trovarsi nel sangue in quella concen-

trazione che è pericolosa per la vita del cuore, come quando si fa la iniezione nella giugulare, sia per la lentezza dello assorbimento, sia per la rapidità dell'eliminazione. Riguardo alla non possibilità di potere avvelenare il cuore per la via dello stomaco, altri molto autorevoli hanno preso la parola a cui io sento di dover essere ossequente.

Io convengo con essi completamente, anzi aggiungo di più che col potassio, non solo non si debilita ma anzi si rinforza l'organo cardiaco; e perciò anzichè evitarlo bisogna premeditatamente usarlo a preferenza, sia come eccitante e rinforzante il muscolo cardiaco e vasale, sia perchè il sale potassico è più efficace. Io dimostro perchè il sale potassico (joduro ecc.) è più efficace nel ricambio materiale di quello sodico col fatto noto già da tempo, a cui nessuno ci ha pensato, che i sali di sodio restano nel plasma sanguigno ed umori interstiziali circolanti, mentre i sali potassici entrano a far parte dei tessuti e penetrano quindi nei protoplasmi e forse nei nuclei, il sale potassico composto a funzione basica si combina agli albuminoidi componenti il protoplasma a funzione acida; perciò il joduro potassico penetra nella cellula, mentre il ioduro di sodio resta fuori di essa negli umori interstiziali e nel plasma sanguigno. E siccome gli albuminoidi ed altri composti organici subiscono il processo di ossidazione quando sono in combinazione con alcali o sale alcalino, così si capisce che il sale potassico, il quale penetra nella cellula, neutralizza i composti acidi e li rende atti ad essere decomposti e bruciati dall'ossigeno; mentre il sale sodico nulla può fare nella cellula nella quale esso non penetra, sebbene eserciti la stessa azione sulle sostanze organiche acide contenute nel plasma. Ecco perchè il sale potassico affretta il ricambio materiale nella cellula, mentre il sale sodico a riguardo di questa è indifferente, esercita la stessa funzione fuori la cellula cioè sugli umori interstiziali e nel plasma.

Fino dal 1883 io ho eseguito numerose esperienze e studi per cui pubblicai sulla Gazzetta degli Ospitali, Luglio, 1885,

N. 22 una nota preventiva *Sull' azione biologica dei principali metalli alcalini ed alcalino-terrosi* che qui riproduco integralmente, per servire punto di partenza e per affermare la data e la lunghezza del mio lavoro.

1. Il potassio, nei batraci (rane, rospi), produce paralisi di senso e di moto, la quale si manifesta dapprima nel punto dove si è iniettato il sale potassico, ma poi si manifesta nel generale. Prima uccide il cervello, il sistema nervoso spinale ed il sistema muscolare volontario, poi, molto dopo, uccide il cuore. Per ottenere questi risultati, bisogna che l' iniezione si faccia in sito lontano dai centri, cioè in un arto posteriore.

Facendo l' iniezione nei sacchi linfatici dorsali, la paralisi dei centri nervosi, dei muscoli volontarj e del muscolo cardiaco è quasi contemporanea. Invece, facendo agire il sale potassico direttamente sul cuore scoperto, questo si arresta in breve tempo; e non pertanto dopo l' animale si muove e fugge.

Nei mammiferi poi il potassio aumenta dapprima l' eccitabilità dei muscoli striati e del muscolo cardiaco; quelli, spontaneamente o per lieve eccitamento, entrano in contrazione tonica, e questo esagera la sua funzionalità sistolica e diastolica. In seguito paralizza il cuore, il quale è sempre ucciso prima che gli altri muscoli possano essere paralizzati. Il sistema nervoso non è influenzato che indirettamente in seguito a disturbi circolatorj. Il potassio dà talvolta tremori e leggieri moti convulsivi, ma questi fatti dipendono dalla aumentata eccitabilità muscolare e dall' anemia cerebrale in seguito a indebolimento e paralisi del cuore.

La differenza d' azione nei batraci e nei mammiferi dipenderebbe dalla differenza di temperatura, giacchè nei primi (animali a sangue freddo) alla temperatura ordinaria il cuore è poco sensibile all' azione del potassio; invece alla temperatura di 37° C. (rospi) di 22° C. (rane) diventa più sensibile e si paralizza prima, talvolta contemporaneamente o poco dopo dei centri nervosi, e così si avvicina al cuore dei mammiferi.

È probabile forse che, raffreddando gli animali a sangue caldo, si dovrebbe in essi paralizzare prima il sistema nervoso e muscolare volontario, in ultimo il cuore.

2. Il sodio nei batraci a piccole dosi aumenta l' eccitabilità dell' organismo e specialmente la sensibilità generale. A dosi grosse produce forti convulsioni toniche e veri accessi tetaniformi. Le convulsioni sono il risultato di un forte eccitamento del sistema nervoso centrale, dei nervi periferici, specialmente delle placche terminali e della contrattilità muscolare. La morte avviene per esaurimento dei centri nervosi.

Il cuore è l' ultimo a morire.

Nei mammiferi il sodio produce gli stessi fenomeni che nei batraci, aumenta cioè l' eccitabilità nervosa e muscolare, e così il solletico od un leggiero stimolo su di una regione della cute, determina contrazione tonica del gruppo muscolare sottostante. In seguito produce convulsioni toniche, che cominciano dal treno anteriore e poi si estendono al posteriore : le convulsioni sono tetaniformi violenti.

Ai primi accessi convulsivi, la respirazione si arresta nella fase inspiratoria per tetano dei muscoli toracici e, per impedire l' asfissia, è necessaria l' insufflazione dell' aria od anche la semplice compressione del torace.

In seguito cessa lo stato convulsivo e succede la paralisi, che comincia dal capo e dal collo, con perdita di coscienza, viene al tronco e si paralizza la respirazione (necessaria la respirazione artificiale), indi finalmente scende al treno posteriore. A questo punto l' animale è morto e di esso solo vivente è il cuore, il quale infine, dopo aver funzionato più del normale, si rallenta e si arresta. Sicchè il sodio uccide gli organi nell' ordine seguente : cervello, midollo allungato, midollo spinale, cuore. I muscoli striati rimangono eccitabili, presentano notevole la contrazione idio-muscolare e s' irrigidiscono pochi minuti dopo la morte. Il sodio fa aumentare la temperatura animale.

3. Il litio, nei mammiferi, agisce come il sodio, dando gli stessi fenomeni, collo stesso ordine e sede.

4. Il calcio, nei mammiferi, produce una notevole anestesia ascendente, che comincia dagli arti posteriori, mano mano vien su al tronco, al torace ed agli anteriori, poi alla faccia, alla cornea ed in ultimo alla congiuntiva palpebrale. A questo punto l'animale completamente insensibile ad ogni stimolo, con abolizione dei riflessi, senza moto volontario, con rilasciamento muscolare, con respiro calmo e con cuore un po' debole e rallentato, presenta un quadro analogo a quello dell'anestesia per cloroformio. La coscienza pare conservarsi fino all'ultimo segno di sensibilità.

Giunti all'anestesia completa di tutte le parti esterne dell'organismo, l'animale poco dopo ricupera la sensibilità in ordine progressivo discendente, e ritorna presto allo stato normale.

Se la dose è troppo spinta, il cuore viene paralizzato e la morte non avviene che per arresto cardiaco.

5. Il magnesio, nei mammiferi, agisce come il calcio, colla differenza però che l'anestesia non è completa nella congiuntiva palpebrale, e, prima di poter giungere a ciò produce l'arresto del cuore. Quindi il calcio ed il magnesio agirebbero sui cordoni posteriori del midollo spinale e sui centri sensorj del cervello.

Riguardo all'azione dei detti metalli sul cuore e sulla circolazione vi sono dei fatti di una certa importanza; ma siccome, per la dimostrazione e intelligenza di essi, sono necessarie delle figure, così tanto queste cose, quanto lo svolgimento di ciò che ho brevemente accennato in questa nota, come altri particolari formeranno il materiale di un'apposita Memoria.

Messina, maggio 1885.

Azione del potassio sul sistema nervoso e muscolare.

Un sale di potassio, quelli comuni che possono penetrare nel sangue cogli alimenti: carbonati, tartrati, fosfati, acetati, ci-

trati, nitrati, solfati, cloruro, ecc., può avere qualche azione sul sistema nervoso?

Iniettiamo nel sangue una quantità notevole di sale potassico allo scopo di avere manifesti i fenomeni dipendenti dalla sua azione, che si vuole conoscere qual' ora l' abbia.

Le esperienze di Blake del 1839 (1) e poi quelle di C. Bernard e di Grandeau (2) e le ulteriori di Traube (3), di Guttmann (4), Rosenthal (5), Podcopaeu (6), Kemmerich (7), Bunge (8), Hermans, Falck, Aubert e Dehn, Sydnay Ringer e Murrell (9) e di molti altri hanno messo in rilievo, che mentre i sali di sodio non manifestano nessuna influenza sul sistema nervoso, muscolare e circolatorio e sulla temperatura, i sali di potassio hanno un' azione tossica paralizzante specialmente sul cuore.

Questi risultamenti hanno appunto prodotto la persuasione generale fino nei medici pratici dell' azione deprimente del potassio sul muscolo cardiaco, e perciò temendo quest' azione, da tutti si è richiesto di non usare nella pratica medicamenti a base di potassio, come gl' ioduri, bromuri, salicilati ecc., ma invece preferire quelli di sodio, ammettendo che il sodio non avesse alcuna azione nociva, nè utile. Vedremo quanto sia giustificato e quanto valore abbia questo preconcetto.

Ma venendo ad osservazioni più minute sui diversi tessuti organici e sui diversi animali e studiando a parte l' azione locale, cioè l' azione in seguito al contatto immediato di un sale potassico in soluzione acquosa con un tessuto e l' azione generale, che si ottiene dallo stesso sale potassico iniettato nel sangue e per questo portato nell' interno dei tessuti e degli organi in contatto cogli elementi anatomici, si sono avuti dei fenomeni differentissimi negli animali a sangue freddo e negli animali a sangue caldo, i quali hanno dato luogo ad altri preconcetti erronei.

Infatti nei batraci i sali di potassio esercitano un' azione deprimente sui centri nervosi, cioè aboliscono sensibilità, motilità, movimenti riflessi, incominciando dagli arti posteriori e ve-

nendo agli anteriori sino a farsi generale, ed a questo punto aprendo il torace dell'animale si trova il cuore pulsante e che funziona normalmente; mentre negli animali a sangue caldo si ha l'arresto del cuore senza previa azione qualsiasi sul sistema nervoso.

Esperienza. — Ad una rana di media grandezza, iniettando in un arto posteriore 2 cg. di sale potassico, dopo 5 m. vi è paresi ed ineccitabilità dell'arto iniettato. Più tardi la stessa paresi ed ineccitabilità si manifesta anche nell'altro arto posteriore e poi aumenta d'intensità e si diffonde agli arti anteriori, finchè la rana senza movimento, rilasciata è ineccitabile in tutto il corpo e non manifesta alcun fenomeno riflesso agli stimoli meccanici. Dopo 35 m. dall'iniezione, l'animale è come morto, ma ha il cuore pulsante e vivo. Colla elettrizzazione localizzata sulla testa si ottiene contrazione in tutto il corpo, meno nell'arto iniettato diventato ineccitabile per l'azione immediata locale. Circa 1 ora dopo si abolisce pure l'eccitabilità nervosa e muscolare allo stimolo elettrico, mentre il cuore continua a funzionare, un po' più lentamente e non si arresta che assai tardi.

Dunque si deduce da ciò che il potassio in tali animali è un paralizzante del sistema nervoso e poi di quello muscolare quando vi arriva per la via normale del sangue; mentre il cuore continua a vivere e funzionare indipendente ed autonomo.

Siccome l'eccitabilità elettrica si conserva per qualche tempo dopo abolito ogni movimento agli stimoli volontari e meccanici, dobbiamo dire che si abolisce l'eccitabilità delle cellule sensitive o riflettrici dell'encefalo e del midollo spinale, per cui non si possono produrre più nè atti riflessi nè volontari; ma che rimane eccitabile la parte motrice, la quale non può essere eccitata che dall'energia elettrica, la quale può raggiungere direttamente i centri motori, facendo a meno degli apparecchi sensitivi. In ultimo si abolisce anche l'eccitabilità degli organi o apparecchi motori nervosi. Non per tanto a questo punto il

cuore ancora vive e funziona; vuol dire che questo organo (parte nervosa e parte muscolare) non viene attaccato dal sale potassico.

Questi risultamenti sono contraddittori con quelli risultanti dalle prime esperienze, e non sono per niente conformi a quelli che si ottengono negli animali a sangue caldo, come vedremo.

Per avere netti e distinti i fenomeni dell' azione, nel modo come l' abbiamo esposto, è necessario usare qualche precauzione, cioè che nelle rane l' iniezione si faccia in sito lontano dal cuore in modo da evitare che la soluzione possa raggiungerlo per diffusione di contiguità attraverso i tessuti vicini e perciò non iniettare nella cavità addominale, nè nei sacchi linfatici dorsali, ma bensì in una gamba posteriore e l' iniezione deve essere in dose e soluzione di piccolo volume, onde vi arrivi il sale potassico per il sangue dopo assorbito.

Infatti se l' iniezione si fa nei sacchi linfatici dorsali o nella cavità addominale, il cuore si arresta contemporaneamente colla manifestazione della paralisi generale.

E quando poi si fa venire direttamente in contatto col cuore scoperto una soluzione di sale potassico, quest'organo si arresta a capo di pochi minuti, mentre la rana o il rospo fugge gracchiando col cuore arrestato ed ineccitabile.

Perciò nei batraci la paralisi dei centri nervosi non si può attribuire a disturbi della circolazione sanguigna, ma devesi attribuire ad azione diretta sulle cellule nervose. Quando il sale circola col sangue ne arriva eguale quantità tanto nel tessuto nervoso, quanto in quello muscolare; ma se per il muscolo la quantità non è sufficiente, per l' organo nervoso basta a fargli perdere la vita. E siccome con quantità maggiori iniettate si ha anche la paralisi del muscolo, vuol dire che la cellula nervosa sensitiva e poi quella motrice hanno in tali animali maggiore affinità col sale potassico, il quale penetrando la cellula vi si combina al protoplasma acido e vi forma un composto morto, un composto non atto a produrre l' energia vitale o nervosa. Dal suo canto il muscolo volontario segue subito il tessuto

nervoso nell' assorbire sale potassico, con cui la miosina e il sarcoplasma si coagula, si altera o si trasforma in un composto non vitale e non atto a produrre l' energia muscolare. Il muscolo cardiaco è meno attaccabile, ha meno affinità ed esso muore molto più tardi, allora quando può essere attaccato da maggior quantità di sale potassico.

Bisogna che faccia notare, che quest' azione del potassio, conseguenza di un' alterazione chimica dei protoplasmi, è un' azione alterante o distruggitrice di quella composizione fisica e chimica molecolare atta alle proprietà vitali, non è preceduta da alcun sintoma che accenni a qualche precedente azione eccitante; perchè l' animale perde l' eccitabilità senza alcun sintoma di previo eccitamento. Il contrario si osserva nei mammiferi.

Da questi risultamenti si deduce che nei batraci l' azione del potassio non è quella che gli antichi sperimentatori hanno rilevato nei mammiferi; nei batraci quindi il potassio è un veleno nervoso paralizzante, e poi anche muscolare.

Per vedere l' azione sui mammiferi io riferisco qualche mia esperienza dalla quale si rileverà che il potassio non ha azione sul sistema nervoso, ma ha azione eccitante sul sistema muscolare, al contrario di quanto è ammesso da tutti, come tuttora si crede che il potassio cioè abbia azione paralizzante tossica sul cuore e non altro.

Esperienza.—Ad un cane da caccia di Chg. 9 si fa in una safena esterna l' iniezione di una soluzione di fosfato neutro di potassio al 5 $^{0}/_{0}$. L' iniezione si fa lentamente nella proporzione di 20 cgm. di sale per volta.

Dalle prime iniezioni il polso si fa più forte e si rallenta, ciò che indica eccitamento notevole del cuore, al contrario dell' opinione comune e di ciò ne faremo uno studio a parte come merita per la sua importanza. Giunti ad iniettare 3 a 4 gram. si nota che i muscoli, specialmente quelli delle scapole, degli arti anteriori e del torace entrano in contrazione spasmodica o tonica col toccare o stropicciare la pelle soprastante. Alla dose

di 6 grammi l'eccitabilità, cioè la facilità di contrarsi è più notevole e vi sono anche contratture e tremori. A 7 $^1/_2$ gram. l'animale si regge appena in piedi e tremula per contrattura muscolare, mentre la coscienza ed il moto volontario appaione normali. Il polso continua ad essere lento ma forte. Alla dose di 8 $^1/_2$ gram. iniettati, si osservano gli stessi fatti; l'animale tremolante, facendolo muovere viene arrestato dalla contrattura muscolare energica e duratura che si desta alla contrazione volontaria dei muscoli.

A 10 gram: di sale iniettato, il cuore è minacciato di arresto. mentre prima si nota un forte impulso di esso nel torace, scompare o si indebolisce il polso alla crurale o l'urto al costato e allora come preso da uno svenimento, per anemia cerebrale. l'animale cade e perde il potere volontario di stare in piedi. Questi fenomeni si dissipano presto, come il cuore riprende la sua funzione. Ma siccome il sangue è saturo di sale potassico, o meglio la fibra muscolare, così a questo momento ogni altra iniezione provoca e minaccia l'azione delle grandi dosi somiglianti all'azione locale, cioè un'alterazione mortale della fibra muscolare che si manifesta colla paralisi e l'arresto dell'organo.

Nell'animale in esperimento ad ogni iniezione abbiamo avuto la sincope cardiaca coi fenomeni consecutivi di svenimento e perdita di coscienza e di movimento, cacciando un grido, avendo un leggero accesso convulsivo, urinazione e rilasciamento muscolare generale.

Insieme a questi fenomeni si osserva notevolissimo l'aumento della contrattilità dei muscoli scheletrici, i quali facilmente si contraggono e s'irrigidiscono strofinando la pelle od anche senza causa apprezzabili; ma durante la sincope sebbene sieno eccitabilissimi essi sono rilasciati, vale a dire che la loro funzione è provocata da energia proveniente dai centri.

Finita la sincope, cioè il cuore ritornando a battere, si ripristina la coscienza ed il moto volontario e la esegerata contrattilità dei muscoli che si erano rilasciati.

Dopo varie di queste alternative alla iniezione del 16° grammo di sale potassico, il cuore si è arrestato definitivamente, con fenomeni convulsivi e morte permanente.

Anche dopo la morte, sebbene i muscoli scheletrici, siano rilasciati mostrano una contrattilità notevolmente aumentata e si osserva essere molto energica ed intensa la contrazione idiomuscolare, giacchè strisciando la punta di un bistori o di uno spillo sul muscolo scoperto questo si contrae formando un cordone

rilevato lungo la linea dello strisciamento. Il cuore intanto è assolutamente ineccitabile.

Vale a dire che l' azione sul cuore è più rapida che sui muscoli scheletrici: l' azione eccitante delle piccole dosi si esercita, dapprima sul cuore, poi coll' aumentare la dose si manifesta l' azione eccitante sui muscoli scheletrici; e così la dose tossica, quella che altera la composizione della miosina, e del sarcoplasma coagulandola (vedi appresso) è minore per il cuore, maggiore per gli altri muscoli.

Nelle condizioni normali la contrazione ha la durata dell'eccitamento nervoso e cessato questo, cessa la contrazione, in modo che il muscolo sia ubbidiente alla volontà; invece sotto l' azione del potassio all' impulso della volontà segue una contrazione energica superiore all' energia nervosa, più del bisogno e più di durata.

Questo è eccitamento e non paralisi e dimostra all'evidenza che il potassio fa aumentare la contrattilità ai muscoli degli animali a sangue caldo; il contrario negli animali a sangue freddo come abbiamo visto. Non è dunque un veleno muscolare paralizzante, ma è un notevole eccitante dei muscoli; mentre come aveva già notato il Guttmann quando i sali di potassio circolano con il sangue nell' organismo non agiscono affatto sui nervi e soltanto debolmente sui muscoli. Si capisce che Guttmann parla di azione paralizzante e niente affatto di quella eccitante, che non supponeva affatto.

Dalle esperienze sulle rane e dall' applicazione diretta della soluzione del sale potassico su dei tessuti (muscolare e nervoso) si è venuti alla convinzione generale che il potassio abbia azione paralizzante, perchè un tessuto, un nervo, un muscolo, un cuore in tale condizione perdono rapidamente ogni eccitabilità. Il fatto poi della iniezione di grandi dosi in soluzione concentrata nella vena, che ha per effetto il rapido arresto del cuore, ha dato l'ultimo colpo fatale ad affermare vieppiù l'erronea idea

che il potassio abbia azione paralizzante generale sui nervi, sui muscoli e sul cuore specialmente, sino al punto da bandirlo dalla terapia ed usare invece del joduro e del bromuro di potassio, medicamenti di provata efficacia, il joduro e bromuro di sodio o di altro metallo, medicamenti di dubbia efficacia, temendo la pretesa azione deprimente sul cuore.

Altre due esperienze con fosfato di potassio sui cani dimostrano gli stessi effetti dell' aumentata eccitabilità e contrattilità dei muscoli scheletrici, che per non dilungare non riporto; ma voglio riferire qualche altra, fatta con solfometilato di potassio, onde escludere che non sia per parte dell' acido quest' azione eccitante sul muscolo.

Esperienza. — Cane bastardo di chg. 9, 400, nella vena crurale si fa lentamente e a riprese l' iniezione verso il cuore di soluzione di solfometilato di potassio; ogni volta si è fatto la iniezione di gram. 0,25 di sale sciolto in 2 di acqua, per evitare l'azione intensa e rapida sul cuore.

Iniettati gram. 0,50, sorgono tremori negli arti posteriori, ed il polso del cuore è rallentato ma più forte. Continuando le iniezioni ogni 3 o 4 minuti, i tremori si fanno generali ed il cuore si fa più lento. La respirazione è rara e profonda, il torace si arresta nella fase inspiratoria per contrazione esagerata involontaria dei muscoli, onde si comprime il torace per aiutare l' espirazione e permettere una nuova inspirazione.

Stropicciando la cute, i muscoli sottostanti entrano in forte contrazione; i tremori continuano, ma l' animale cammina regolarmente. Cuore lento ma forte.

Iniettati 3 1/2 di sale vi sono tremori più forti ed anche movimenti dei muscoli della faccia. La respirazione è inceppata, arrestata nella fase inspiratoria per l' esagerata eccitabilità dei muscoli e perciò insufficiente alla ematosi, che quindi si aiuta colla insufflazione. Indi i tremori si accentuano, si ha contrazione tonica dei muscoli degli arti anteriori e delle spalle e poi un leggiero accesso tetanico generale; ma l' animale lasciato libero può camminare e va ad accovacciarsi. Così seguita fino a giungere ad iniettare 10 grammi di solfometilato, fino a quando si è arrestato il cuore, a cui sono seguite varie inspirazioni e dei movimenti convulsivi per anemia cerebrale.

Questa esperienza dimostra le stesse cose delle precedenti, cioè aumento della contrattilità muscolare, aumento dell' impulso del cuore e nessuna azione sul sistema nervoso.

Esperienze fatte con carbonato di potassio hanno dato per risultamento che questo sale ha un' azione molto intensa sul cuore, per cui il cuore si arresta facilmente prima che il sale possa agire sui muscoli scheletrici e perciò è facile non potere vedere quest' azione. Una volta ho potuto avere fatti evidenti usando un artificio come passo ad esporre.

Esperienza. — Cane da caccia di chg. 11, 700. Nella vena crurale si inietta soluzione di bicarbonato di potassio grammi 5 in 40 di acqua; due grammi di soluzione per volta; così il sale non arriva immediatamente nel cuore e può diffondersi in tutto l' organismo e dare azione su altri organi.

Alla 5ª iniezione si ha già la tendenza della respirazione ad arrestarsi nella fase inspiratoria e poi, dopo due altre, si ha il tetano dei muscoli toracici, per cui è necessario insufflare l'aria. Il cuore pulsa forte, la pressione sanguigna aumentata, ad altre due iniezioni il cuore si è fatto irregolare, si è tetanizzato, come ha dimostrato l' ultimo tracciato, e si è arrestato. In tutto si è iniettato 2 $^1/_2$ gram. di bicarbonato potassico.

Visto che anche col carbonato si ha l' aumento della contrattilità dei muscoli, ma essendo intensa la sua azione sul cuore non è possibile di potere vedere l' ulteriore azione, e intanto si ottiene già l' aumento della contrattilità dei muscoli, a minor dose che con gli altri sali, ho fatto un' altra esperienza facendo l' iniezione nell' arteria crurale in senso centrifugo.

Esperienza. — Cane da caccia di chg. 24. Si fa l' iniezione nell' arteria crurale sinistra di un grammo di bicarbonato potassico sciolto in 20 c. c. di acqua. Ad ogni iniezione l' animale grida per dolore e l' arto si distende e trema senza ottenere altro. Chiusa l' arteria, messo l' animale in libertà, mostra di soffrire e trascina l' arto paralizzato penzoloni. Sicchè da questa esperienza, in cui ho tentato di fare agire direttamente il sale sui muscoli senza passare per il cuore, ne è risultato che ad ogni iniezione si è avuto contrazione muscolare, donde il distendimento ed il tremore dell' arto. Perciò si conferma ancora il fatto che il potassio eccita i muscoli scheletrici.

La conclusione di queste prime ricerche è che il potassio è un agente muscolare ed eccita o aumenta la contrattilità dei muscoli scheletrici, i quali sia per l'eccitamento naturale proveniente dai nervi, sia per via riflessa o diretta con un semplice atto meccanico, strofinare, spizzicare ecc: entrano facilmente in contrazione oltre il grado normale per intensità, forza e durata.

Non manifesta azione sul sistema nervoso.

Azione sull' apparecchio circolatorio.

Non solamente sui muscoli scheletrici, ma anche più notevolmente e più intensamente sui muscoli splancnici, p. e. cuore e vasi, il potassio agisce eccitando.

Su questo argomento io ho fatto numerose esperienze, di cui le principali sono pubblicate in due miei scritti: *Alcune ricerche sul meccanismo di azione dei metalli alcalini ed alcalino-terrosi.* (Annali di Chimica ecc. Vol. III. Serie IV. 1886 e Vol. V. Serie IV; 1887).

Io qui riferirò esperienze nuove non inserite in quei due scritti.

L'azione del potassio sul cuore dei batraci (rane, rospi) è molto nota e si sa che il cuore s'indebolisce, riduce le sue sistoli e si arresta paralizzato, e specialmente se la soluzione di un sale potassio vi arriva a bagnare il cuore dallo esterno, l'organo in breve tempo subisce dapprima un certo eccitamento che si manifesta in un aumento del numero delle sistoli, ma poi subito si rallenta e si arresta pallido, contratto ed ineccitabile, mentre l'animale è vivo e forte, fugge col cuore paralizzato.

Quest' azione locale è effetto di azione intensa e differisce dall' azione graduata e leggiera quando vi arriva col sangue, come un ferro rovente da uno moderatamente caldo.

Col sangue il sale arriva poco a poco nel cuore, come contemporaneamente vi penetra in altri organi ed in altri muscoli,

allora si ha un' azione più naturale. Così nei batraci è necessario usare la precauzione di iniettare la soluzione salina in un arto posteriore e non mai nei sacchi dorsali e molto meno nella cavità peritoneale, nei quali casi si ha sempre un' azione per contatto immediato. In questo modo facendo, iniettando cioè in una gamba da 2 a 3 cg. di sale potassico dopo avere messo il cuore allo scoperto si osserva quanto segue: riduzione a quasi metà del numero delle sistoli ventricolari con maggiore durata ed ampiezza della escursione diastolica, prevalenza della diastole ed aumentata energia della sistole. In un certo momento la diastole è così ampia e prolungata che appare duplicata (ciò si osserva benissimo nei rospi) nel quale fatto pare come se dopo la diastole solita vi manchi la sistole e invece di questa, dopo un brevissimo istante di sosta, segue una secondaria ed ulteriore dilatazione diastolica, dopo la quale infine succede una forte sistole.

In ultimo il cuore si rallenta sempre più, perde la sua forza, s' indebolisce e si ferma pallido e contratto (senza sangue) quando è stato esposto all' aria; invece si trova rilasciato alquanto rosso-violaceo, per contenere sangue, quando si è lasciato coperto nel torace.

Ho fatto le medesime esperienze su animali previamente atropinizzati ed ho osservato sempre gli stessi fatti. Ho fatto anche esperienze grafiche col cuore asportato e messo tra la pinzetta cardiaca del Marey e bagnandolo colla soluzione salina diluita, ho veduto lo stesso rallentamento e delle intermittenze visibili dal tracciato.

Tutto ciò indica che il potassio ha azione sul muscolo cardiaco e che gli effetti sono dipendenti da un' azione diretta del sale potassico sulla fibra muscolare cardiaca, sia che il sale vi arrivi per il sangue o direttamente dall' esterno.

Anzichè esporre a dimostrazione di quanto dico le cifre nude delle esperienze, che ognuno può ripetere, e non credo necessario allungare questo scritto inutilmente, preferisco discutere un poco il significato fisiologico di questi fatti.

Abbiamo visto, che il cuore aumenta la diastole ed esegue una sistole più energica.

Questo secondo me significa aumentata contrattilità della fibra muscolare e s' interpreta per aumentata energia potenziale elettromagnetica delle fibrille e propriamente dei dischi trasversali. Siccome il potassio non pare che aumenti l'energia nervosa, giacchè, come abbia veduto e, come abbiamo dimostrato avanti, non esercita azione alcuna sul sistema nervoso dei mammiferi, così dobbiamo concludere che il potassio in moderata quantità, in soluzione salina e perciò ionizzabile o ionizzato, per la sua carica elettrica, aumenti il potenziale dei dischi magnetici delle fibrille muscolari (V. mio lavoro *L' Organismo vivente e la sua anima*) e perciò aumenta l' eccitabilità o la contrattilità, come si manifesta ad ogni stimolo, il quale nel caso del cuore in sito naturale, l'ossigeno del sangue e lo stimolo nervoso (anch'esso elettrico).

Quando il sale potassico vi arriva in grande quantità, allora si combina ai fosfo-albuminati del sarcoplasma, e forse anche ai dischi trasversali, di cui altera la costituzione fisico-chimica e fa perdere il potere elettromagnetico, e con ciò ogni eccitabilità e proprietà fisiologica. Così è che il potassio dapprima è eccitante e poi a grande dose è paralizzante. Quando si fa l'iniezione nella vena di un mammifero, la massa del sangue, carica di sale potassico vi arriva prima nel cuore e subito mediante le coronarie nel muscolo cardiaco, e in questo prima sempre che nelle altre masse muscolari , dove vi arriva meno concentrata. Perciò la prima azione del sale potassico si esercita sul cuore e sui vasi, i quali organi sono i primi a trovarsi in contatto di esso, oltre l'esserci una maggiore affinità della fibra muscolare splancnica con un sale potassico.

Lo studio dell' azione sulla circolazione sanguigna riesce meglio sui cani, facendo uso della manometria e sfigmografia. Con questi mezzi ho ottenuto dei fatti molto interessanti ; gli stessi effetti ho ottenuto con curarizzazione o senza.

Esperienza. — Cane bastardo di kg. 9,100, curarizzato, applicazione del manometro e stigmoscopio alla carotide; iniezione nella giugulare di una soluzione di carbonato potassico al 5 %, s' iniettano 20 centigr. per volta.

Ora	Pressione	Osservazioni
11,33	160	Tracciato 1° fig. 1ª
11,35	......	Iniezione di 0, 20 di CO^3K — Tracciato 2.
11,36	260	2°, 3°
11,38	190	Iniezione di 0.20, di carbonato K.
11,42	240	il tracciato mostra curve ampie ed alte.
11.45	160	Iniez. di acqua sempl., in quant. eguale. 4 c. c.
11,47	145	Iniezione di 0,20 carbonato K.
11,49	200	
11,50	230	— A ore 11,52, iniezione di 0,20
11,53	250	iniezione di 0,40
12,7	220	iniezione di 0,20
12.13	210	iniezione di 0,20
12,15	arresto del cuore.	

In tutto si sono iniettati gram: 1, 60 di carbonato di potassio.

I fatti risultati sono i seguenti: dopo ogni iniezione si ha un enorme aumento della pressione arteriosa, la quale considerata che nello stato normale al massimo sia di 160 millim. arriva dopo l' iniezione del sale potassico a 230, 250 e oltre. Il manometro indica che le oscillazioni della colonna mercuriale sono molto alte ed ampie e dopo una serie di sollevamenti succedono delle oscillazioni molto ampie in basso, indicando delle diastoli assai profonde ed estese. I tracciati stigmografici mostrano curve molto rare, alte ed ampie e di tanto in tanto delle curve in basso, come per mancanza di una diastole o prolungamento notevole di essa. Nell'insieme si osserva che il cuore rallenta la sua pulsazione, ma è molto più forte, esegue una più energica sistole ed una più ampia diastole. I prolungamenti diastolici sono causa che fanno sembrare intermittente il polso e con essi coincide il rapido abbassamento istantaneo della colonna manometrica. L'iniezione di acqua semplice è stata seguita da lieve abbassamento della pressione e dimostra che l' enorme aumento della pressione dipende dall' arrivo del sale potassico nei muscoli, e perciò l' eccitamento del cuore e dei vasi è pro-

prio dovuto al contatto di esso colle fibrille muscolari e cioè coi dischi trasversi.

Esperienza. — Cane barbone di kg. 7,500—solita applicazione alla carotide del manometro e dello sfigmoscopio; iniezione nella giugulare di fosfato neutro potassico al 5 %.

Il fosfato agisce con minore energia del carbonato e permette di osservare meglio tutte le fasi dell'azione.

Ora	Pressione	Osservazioni
11,18	160	tr. 1° fig. 11 — Iniezione di 0,60
11.21	165	iniezione di 0.60
11,24	175	rallent. e intermitt. del polso—iniez. di 0.40.
11,26	180	tr. 2, iniezione di 0,80
11,38	190	tracc. 3.

In seguito per 1 $^1/_2$ ora la pressione si è mantenuta al disopra di 160 ed in questo frattempo si sono iniettati altri 2,60 di fosfato. Il polso ha presentato gli stessi caratteri come si rileva dai tracciati avuti, cioè curve ampie ed alte con delle profonde e duplicate diastoli di tanto in tanto, indicanti un aumento enorme nella forza e nella estensione della diastole e della sistole cardiaca, non che aumentata contrazione e tonicità dei vasi. Poi continuando ancora l'osservazione per altre ore 3 $^1/_2$ ed iniettando altri 5 gr., la pressione arteriosa è andata gradatamente abbassandosi a 140, 100, 90, 55, allorchè il cuore si è arrestato. Contemporaneamente all'abbassamento della pressione sanguigna, il polso di pari passo si è indebolito, reso più piccolo e più frequente, senza presentare più le intermittenze diastoliche ed in ultimo rarefacendosi è scomparso.

Questa esperienza ci fa vedere che con il fosfato si hanno meno effetti nocivi, essendo il fosfato un componente normale dei protoplasmi, quale fosfoalbuminato in generale o fosfocarnico potassico in particolare. Con il carbonato, con cloruro si ha un' alterazione più rapida dei fosfoalbuminati e perciò si ha la morte istantanea del cuore quando la dose è grandissima; col fostato l'alterazione è più graduata e permette che il cuore perda

le proprietà vitali gradatamente. Ma sempre emerge il fatto sconosciuto che sotto l' azione di un sale di potassio tutto l' apparato circolatorio viene eccitato, aumenta di forza e di energia, e perciò di funzionalità completamente l' opposto di quello che si ritiene communemente.

ESPERIENZA. — Cane bastardo di chg. 10, 400; solita applicazione del manometro e stigmoscopio alla carotide; iniezione nella safena esterna di solfonetilato di potassio in soluzione al 3 $^1/_2$ 0/0.

ORA	PRESSIONE	OSSERVAZIONI
11,30	170	iniezione di gram. 0. 70, a 0, 10 per volta
11,42	210	polso un po' rallentato ed intermittente, oscillazioni più alte
12,11	200	iniezione graduata di gr. 2, 70
12,17	250	
12,22	240	iniezione di altri 0. 80; polso più lento, più ampio con intermittenze
12,25		arresto del cuore dopo iniettati altri 1. 20.

Con l' arresto del cuore la colonna mercuriale si è abbassata a 0°, l' animale ha emesso delle grida, ha avuto convulsione, ha urinato ed è morto per improvvisa anemia cerebrale. Si sono iniettati in tutto gram : 5, 40 di solfonetilato.

I risultamenti di questa esperienza sono conformi a quelli delle altre.

Altre esperienze, che lascio inedite, dimostrano pure l'enorme aumento della pressione arteriosa, non che l' aumento in ampiezza e forza del polso, con rallentamento e qualche intermittenza di tanto in tanto.

Sicchè i fatti che emergono sono che quando nel sangue vi arriva una notevole quantità di sale potassico, si ha aumento della pressione sanguigna e rinforzamento della pulsazione cardiaca ; ciò che indicherebbe essere il cuore ed i vasi sottoposti ad enorme eccitamento, per cui da una parte i vasi contraen-

dosi spingono il sangue nelle parti centrali del sistema arterioso, dall'altra il cuore spinge con più forza la massa sanguigna nell'aorta. A chi sarebbe dovuto questo aumento straordinario della contrattilità e funzione dei muscoli cardiaci e vasali? Sarebbe dovuto ad azione eccitante sulla fibra muscolare direttamente o sul sistema nervoso cardiaco-vasale, onde questo eserciterebbe la sua aumentata funzione sull'apparato muscolare?

Per rispondere a questa domanda facciamo delle esperienze usando artificii da potere vedere se e quali effetti si hanno da un sale potassico sul cuore e sui vasi, sottratti il più che possibile alla innervazione.

Le esperienze sul cuore di rana staccato dall'animale, hanno poco valore, perchè il cuore se è sottratto dall'innervazione estrinseca, quella cerebro-spinale, non è da quella intrinseca gangliare, che è l'apparecchio eccitomotore immediato del muscolo cardiaco. In modo che staccato il cuore e messo in un sangue contenente una data proporzione di sale potassico, gli effetti possono dipendere tanto da azione sui muscoli, quanto sui gangli nervosi. E allora, cosa si può conchiudere?

Dico di passaggio che ho pur non di meno fatto queste esperienze, staccato il cuore da una rana, applicatovi la pinzetta cardiografica di Marey, ho preso dei tracciati prima e dopo la immissione di una soluzione di sale potassico, e da questi ho veduto che le pulsazioni del cuore si rallentano e subiscono delle intermittenze, in modo analogo come si osserva nei tracciati ottenuti dal cuore in sito sotto l'influenza della innervazione estrinseca.

Queste esperienze ci dicono che il potassio può agire sul cuore, come sui vasi e che il rallentamento e l'intermittenza del polso, cioè la prolungata diastole, sono dipendenti da modificata funzione dell'organo cardiaco, indipendentemente dalla innervazione estrinseca e dalla pressione del sangue. Con ciò non abbiamo potuto ancora sapere se agisce sulla fibra muscolare o sulla cellula o fibra nervosa.

Debbo riferire in proposito che dai cani non curarizzati, ho avuto molti tracciati stigmografici che indicherebbero come il cuore sotto l' azione del potassio andrebbe soggetto al tetano, specialmente nel momento quando per la grande dose vi è minaccia di paralisi.

E siccome questo fatto non si è mostrato nelle esperienze con curarizzazione dell' animale, in cui è abbassata l' eccitabilità dei nervi, così dobbiamo concludere che l' azione tetanizzante consistente in una serie di sistoli l'una sull'altra, provenga da un ripetuto eccitamento del sistema nervoso o meglio da scariche precipitose dell' energia elettrica, dai gangli, la quale promuove la sistole.

Inoltre ho fatto esperienze sui cani distruggendo previamente il midollo allungato mediante punternolo attraverso lo spazio occipito-atlantoideo e previo taglio dei vaghi. In questo modo sebbene abolita la innervazione centrale cardio-vasale, l' iniezione del sale potassico nella giugulare ha dato sempre gli stessi effetti, cioè aumento enorme della pressione arteriosa, rallentamento e rinforzamento del polso con qualche intermittenza o prolungata diastole. In queste circostanze sperimentali restano sempre i nervi e gangli periferici in funzione ed eccitabilità normale, perciò si può dire che il potassio vi agirebbe per mezzo di questi.

Allora ho fatto esperienze in cani, a cui mediante prolungate inalazioni di etere o di cloroformio, oppure mediante spinta curarizzazione sino al punto che, eccitando con corrente elettrica il nervo crurale od altro nervo sensitivo, sieno aboliti i riflessi vasomotorii. È noto che nello stato normale eccitando un nervo sensitivo si ha per riflessione sui centri vasomotori un aumento della pressione sanguigna, non chè un rinforzamento delle pulsazioni cardiache; questi si chiamano riflessi vasomotorii. (1) Ora coll' inalazione dell' etere o del cloroformio o colle iniezioni di

(1) V. esperienze pubblicate negli Annali di Chimica 1886 e 1887.

gran dose di curaro si arriva a rendere impossibili questi riflessi vasomotorii. Nel caso degli anestetici l' eccitamento resta fermato nei centri sensitivi e non passa nei centri vasomotorii; nel caso del curaro l' eccitamento passa ai centri motorii si riflette pei nervi centrifughi, ma si arresta all' estremità di questi e non passa nella fibra muscolare. Perciò è colla curarizzazione che otteniamo condizioni sperimentali precise e concludenti, in quantocchè allora siamo sicuri che abbiamo sottratti i muscoli all' influenza nervosa, e allora possiamo sapere se il farmaco agisce per i nervi, o ne fa a meno di questi ed agisce direttamente eccitando la fibra muscolare.

Messa l' esperienza così, si sa che per l' abolita funzionalità nervosa che mantiene la funzione muscolare, la pressione del sangue scende molto bassa a 60 e 50 e anche 40 millim., mentre il polso cardiaco è piccolo e debole. A questo punto iniettando nella giugulare il sale potassico, dopo poco si vede in modo sorprendente che la colonna mercuriale sale, e le sue oscillazioni diventano visibili ed ampie cioè la pressione aumenta enormemente raggiunge il grado normale e poi lo sorpassa sino a 200, 250 e oltre, mentre le pulsazioni cardiache si rinforzano e sono più alte e più ampie.

Questi brillanti risultamenti dimostrano a parer mio che sebbene i nervi sieno ineccitabili e non trasmettono l' eccitamento alle fibre muscolari, il potassio ne fa a meno e produce gli stessi effetti di eccitamento, vale a dire agisce sulla fibra muscolare direttamente, che eccita s' intende sviluppando enorme quantità di quella energia che fa contrarre le fibre muscolari.

Ed ora si vorrà persistere da parte dei Clinici e Medici nell' errore che il potassio sia un debilitante del cuore e dei vasi? Essi a causa delle cattive esperienze dei primi sperimentatori, che iniettavano l' enorme dose di 2 a 3 gram: di sale potassico, non ne hanno avuto colpa, sono stati ingannati, ma ora se si ostinano diventano colpevoli davvero.

Ma a schiarimento e ulteriore dimostrazione del fatto enun-

ciato, che è il punto principale importante dell' azione del potassio riferisco le seguenti esperienze.

Esperienza—25 Gen. 1886. Cane di chilog. 11,800, curarizzato sino alla paralisi dei vasomotori, cioè che eccitando il nervo crurale non si ha aumento di pressione sanguigna e non eccitamento delle pulsazioni cardiache:

Ora	Pressione	Osservazioni
11,20	55	Assicurata l'abolizione dei riflessi vasomotori
11,22	55	Iniezione di 10 cg. di ClK. in soluzione al 2 % nella giugulare.
11,24	110	Rallentamento e sollevamento del polso.
11,25	85	Iniezione di 20 cg. di ClK.
11,27	160	
11,29	75	Iniezione di 40 cg. di ClK.

Paralisi cardiaca e morte.

Esperienza—12 luglio 1886. Cagnolina di chilg. 3, curarizzata sino ad essere aboliti i riflessi vasomotori, eccitando il nervo crurale.

La pressione arteriosa è abbassata a 65 e iniettando cg. 10 di carbonato di potassio si ha un grande innalzamento della pressione sino a 120 con aumento del polso in altezza ed ampiezza.

Esperienza—19 gennaio 1886. Cagna di chilg. 10,800 curarizzata sino all'abolizione dei riflessi vasomotori. La pressione è 50-80 millm., ma dopo l' iniezione di cg. 10 di cloruro di potassio aumenta sino a 200 e contemporaneamente il polso è diventato più raro, più forte, più ampio. Poi si è abbassata nuovamente la pressione a 75 e fatta l' iniezione di cg. 10 di ClK nella giugulare, è aumentata a 140 e più tardi abbassata a 85, per una terza iniezione di cg. 20 di ClK. si è alzata a 130 e poi ancora iniettati altri cg. 20, la pressione è salita a 200 con le solite modifiche del polso. Indi si sospende la respirazione artificiale e la pressione giunta a 150 è poi per l'asfissia salita a 240.

Dunque è inutile più dubitare, il potassio eccita gli organi della circolazione sanguigna (cuore e vasi) anche quando sono depressi e quando la eccitabilità del sistema nervoso cardiovasale

è abolita per spinta curarizzazione; e ciò fa perchè eccita direttamente la fibra muscolare.

Siccome io sostengo la teoria che la fibra muscolare si contrae per influenza di energia elettrica proveniente dai nervi o anche per la stessa energia che si svolge nel muscolo stesso in seguito a contatto tra la fibra muscolare e sale potassico o di altro stimolo chimico, fisico o meccanico; così io concludo che il potassio eccita la fibra muscolare direttamente perchè con questa forma un sistema elettrogenico; il ione K con carica positiva aumenta il potenziale delle fibrille. In altri termini la fibra muscolare è elettrizzabile al contatto di un sale di potassio e perciò si eccita e si contrae.

Essendo dunque di natura elettrizzante e perciò di eccitamento l'azione del potassio sulla fibra muscolare, si capisce che quando s'iniettano grandi dosi la fibra si arresta per abnorme e intensissimo eccitamento o per abolita elettrizzabilità.

L'arresto del cuore sotto le grandi dosi può essere effetto di alterazione chimica, cioè che si forma colle piccole dosi composto vitale ed elettrizzabile, colle grandi dosi invece composto non vitale non elettrizzabile e perciò non eccitabile. Io poggio questa ipotesi sul fatto che l'albume d'uovo trattato con alcali, dapprima forma un composto solubile e poi aumentato l'alcali si coagula come gelatina ed insolubile nell'acqua.

Differenza di azione del potassio negli animali a sangue caldo e a sangue freddo.

In qualunque maniera, via e forma il sale potassico vi arriva nel sangue e che con questo si diffonde nell'organismo, esso è assorbito dai tessuti in diverso grado a seconda l'animale. Così nei batraci si osservano fenomeni di paralisi del sistema nervoso, dapprima di quello centrale e poi di quello periferico, indi perdita di eccitabilità dei muscoli scheletrici, infine dopo eccitamento, tardiva paralisi dei muscoli planenici (cuore, vasi). Invece negli animali a sangue caldo i primi fenomeni che si osservano

riguardano gli organi della circolazione sanguigna, coi fatti del rallentamento del polso e del più forte impulso del cuore, del notevole aumento della pressione sanguigna per speciale eccitamento della fibra muscolare del cuore e dei vasi; mentre non si arriva a potere agire sui nervi. Ciò parrebbe significare che a bassa temperatura il sale potassico abbia più affinità col tessuto nervoso, dal quale viene pel primo assorbito, poi dai muscoli scheletrici, in ultimo dai muscoli planenici; al contrario ad elevata temperatura, le affinità sarebbero prevalenti pei muscoli splancnici, moderate pei muscoli scheletrici, nulle o non possibili pei nervi.

Inoltre si osserva una differenza anche nella qualità dei sintomi, cioè nei batraci vi è paralisi del sistema nervoso prima e del sistema muscolare poi, mentre nei mammiferi indifferente pel sistema nervoso, si osserva un forte eccitamento della fibra muscolare cardiovasale con piccole dosi e debole eccitamento dei muscoli scheletrici.

Ciò vuol dire che nei batraci il sale potassico si combina alla sostanza nervosa e ne annienta la proprietà di produrre energia; al contrario nei mammiferi, se si combina o non alla fibra muscolare splancnica, è evidente che sviluppa in essa fibra l' energia necessaria che fa aumentare l' eccitabilità e ne produce la contrazione. Siccome detta energia, secondo me è sperimentalmente dimostrato essere di natura elettrica (1), così concludo che la fibra muscolare, specialmente quella splancnica, alla temperatura degli animali caldi è elettrizzabile in contatto del sale potassico, mentre non lo è il tessuto nervoso.

Quest' ultimo pare che non si combini col sale potassico alla temperatura animale, e ne è indifferente, ma si combina alla temperatura bassa dei batraci e, in seguito a questa combinazione, subisce l' annientamento di ogni proprietà vitale. Nell' uno e nell'altro caso risulta quindi, che il tessuto nervoso non è elettrizzabile in contatto di un sale di potassio penetrato per la via

(1) V. Curci — *L'organismo vivente e la sua anima.*

del sangue. Certamente non è la stessa cosa lo scoprire l'encefalo e applicarvi direttamente una sostanza, come ha fatto Astolfoni con sale potassico, allo scopo di studiarne l' azione sul sistema nervoso. (10). Questo metodo può essere adoperato solamente a scopo scientifico e non per trarne qualche criterio pratico.

È molto tempo che io cercai e spiegai la ragione di questa differenza e come appendice la esposi in uno scritto stampato sugli *Annali di Chimica* nel 1886 già citato, che io qui credo utile di riferire, giacchè quelle esperienze e deduzioni sono rimaste inosservate.

La ragione della differenza dell' azione consiste nella differenza di temperatura. Infatti mettendo delle rane in acqua e riscaldando gradatamente quest' acqua alla temperatura circa 32°c. e non sorpassando i 33 e tenendovele per un paio di ore, allo scopo, con il riscaldare i tessuti, di renderle quasi degli animali a sangue caldo, ho fatto in uno degli arti posteriori l' iniezione di un sale potassico, bicarbonato, cloruro, fosfato ecc. alla dose di 2, 3, 4 e 5 cgm. Allora ho osservato che l' animale dopo un certo tempo incomincia a mostrare sintomi leggieri di paralisi ; a questo momento scoprendo il cuore, si trova già arrestato in diastole ; mentre alla temperatura ordinaria anche quando la paralisi generale è completa, il cuore si trova sempre pulsante. Quindi il cuore si arresta prima che incomincia l' azione sul sistema nervoso, cioè a dire s' inverte l' ordine ordinario di essa azione a bassa temperatura. Stabilito questo fatto con molte esperienze e riconfermato anche sui rospi, i quali animali sopportano un maggior grado di calore, sino a 37°c. e così riscaldati in acqua a 37 e non oltre per un buon paio di ore, facendo poi l' iniezione sempre in uno degli arti posteriori per evitare la penetrazione nella cavità peritoneale alla dose di 5 e talvolta sino a 10 cgm. di sale potassico, hanno poi presentato lo stesso fatto, vale a dire di trovare il cuore arrestato al cominciamento dei primi sintomi di paralisi generale.

Per vedere con precisione il momento in cui il cuore si ar-

resta ho fatto esperienze su rane e rospi, a cui aveva previamente scoperto il cuore, colle dovute precauzioni di fare una piccola apertura e senza aprire il pericardio, quanto bastava per poterlo vedere ed osservare. In tali casi ho visto il cuore dapprima rallentarsi e poi arrestarsi, mentre l'animale aveva ancora tutti i movimenti, sensibilità ed eccitabilità. Non è inutile dire e far notare che si sono tenuti degli animali di confronto, senza iniezione, ai quali il cuore non si è arrestato.

Ho veduto pure in questi esperimenti che l'eccitabilità del miocardio si abolisce prima di quella dei muscoli striati (s'intende di quelli non imbevuti di soluzione potassica). Il contrario adunque di ciò che avviene alla temperatura ordinaria di inverno. Talvolta, mi è accaduto di osservare che il cuore arrestato, messo l'animale fuori l'acqua calda, col raffreddamento ha ripreso le sue pulsazioni. Quest'ultimo fatto indicherebbe che il sale di potassio non si combina stabilmente alla sostanza muscolare, perchè non credo poter ammettere che col raffreddamento venisse rotta la combinazione avvenuta a caldo, e perciò dobbiamo concludere che è solamente l' aumentato calore che rende il muscolo elettrizzabile in contatto del sale e perciò eccitabile in modo anormale ed esagerato—e che a freddo ciò non avviene.

RIASSUNTO

In riassunto risulta che il tessuto nervoso tanto negli animali a sangue freddo, che in quelli a sangue caldo non si eccita in presenza di un sale di potassio, anzi si paralizza e perde l' eccitabilità ; cioè esso non si elettrizza e perde la conducibilità elettrica e da ciò la ineccitabilità. I muscoli a bassa temperatura fanno come il tessuto nervoso, si paralizzano perdendo l' elettrizzabilità e la conducibilità, forse in questo caso in seguito a combinazione chimica come pare dallo aspetto diverso che prende il muscolo. Ma ad una temperatura superiore cioè ai 32° pei batraci ed ai 37° c. pei mammiferi, i muscoli special-

mente del cuore e dei vasi sono eminentemente elettrizzabili col potassio, per cui aumentano di eccitabilità e di funzione e questo fenomeno avviene per semplice contatto e non in seguito a combinazione, perchè come abbiamo visto nelle rane già calde, i fenomeni di iperfunzionalità del cuore si dissipano col ritorno alla temperatura ordinaria; ciò non potrebbe avvenire se il potassio contraesse una combinazione chimica colla sostanza muscolare.

La prova della elettrizzabilità del muscolo a temperatura elevata in presenza del potassio risulta dai numerosi studi sperimentali di Elettrofisiologia, che qualunque irritante applicato su di un muscolo (sale di potassio, sodio ecc.) il quale aumenti l'eccitabilità ed ecciti la contrazione, produce la variazione negativa o corrente di azione nella corrente di riposo, cioè produce una corrente elettrica, la quale, mentre si manifesta all'esterno come variazione negativa, nell'interno provoca la contrazione muscolare. Ciò è solido fondamento dimostrativo al mio principio, che un irritante in contatto di un tessuto svolge energia elettrica, per la quale si eccita e si ha la reazione. E quindi dobbiamo ammettere che a quel grado di temperatura il muscolo è elettrizzabile in contatto di un sale potassico. Da ciò la eccitabilità speciale del muscolo cardiaco e vasale per il potassio.

A piccole dosi l'intensità dell'energia è sufficiente a produrre un notevole eccitamento ed aumento della funzione muscolare, a grande dose la quantità enorme dell'energia uccide come fulmine la fibra muscolare. Si capisce che iniettando grosse dosi nella vena si ha un intenso eccitamento del cuore e dei vasi, per cui si ha un rapido innalzamento della pressione e rinforzamento delle pulsazioni cardiache, ma subito come fulminato il cuore si arresta. Questo fatto appunto diede luogo all'errore di far credere essere il potassio un forte deprimente del cuore e si è cercato bandirlo dalla farmaceutica. Intanto non bisogna dimenticare che il potassio è contenuto abbondantemente negli alimenti, entra come costituente del protoplasma, serve come base alcalina nel ricambio materiale e per allontanare gli acidi dal-

l'organismo. Bisogna rilevare specialmente che ha una funzione fisiologica messa in luce dalle nostre esperienze, quella cioè che esso serve a stimolare e conservare l' eccitabilità muscolare. È quindi un controsenso, un errore anzi, quello di volerlo escludere dal novero dei medicamenti, mentre è necessario come alimento e può prestare servizi come medicamento per sollevare le forze dei muscoli, specialmente del cuore in malattie di questo organo e nelle denutrizioni, quale di marasma cardiaco, cuore atrofico e debole, degenerato ecc.

BIBLIOGRAFIA

1. Edimburg medical Iournal.

2. Iourn. de l'anatomie et de la physiol: vol. I. p. 378. Paris. 1864.

3. Gesammelte Beiträge zur Pathologie und Physiologie, vol. I. p. 383.

4. Berliner klinische Wochenschrift, 1865 — Archiv. f. pathol. anatomie, vol. 35.

5. Vergleichende Untersuchungen über die physiologische Wirkung der Salze der Alckalien und alkalischen Erden. Inaug. Diss.. Dorpart, 1874.

6. Wirchws's Archiv. f. pathol. anat., vol. 33, p. 505, 1865.

7. Archiv. f. d. ges. Physiol. vol. I. p. 120, vol. II. p. 49, 1868.

8. Archiv. fur d. ges Physiol. vol. IV p. 235 — Zeischrift f. Biologie vol. IX p. 104.

9. The Iournal of Physiology, vol. I. p. 72.

10. Archives Inter. de Pharmacodynamie et de Thêrapie — Bruxelles 1903, vol. XI.

Memoria XIX.

Sopra una classe di problemi di meccanica riducibili a quadrature

Memoria del Prof. G. PENNACCHIETTI

Supponiamo che le componenti X, Y, Z della forza che agisce sopra un punto materiale, libero nello spazio, di massa eguale all'unità, sieno funzioni delle sole coordinate x, y, z del punto e che tra le componenti stesse sussistano due relazioni della forma:

$$xY - yX = \frac{1}{x^2}\varphi(\eta, \zeta),$$

$$xZ - zX = \frac{1}{x^2}\psi(\eta, \zeta),$$

ove si è posto, per brevità:

$$\eta = \frac{y}{x}, \qquad \zeta = \frac{z}{x}.$$

Supponiamo altresì che si abbia:

$$\varphi = \frac{\partial r}{\partial \eta}, \qquad \psi = \frac{\partial r}{\partial \zeta},$$

$$r = f(\rho^2) + \frac{1}{\eta^2} f_1\left(\frac{\zeta}{\eta}\right), \qquad \rho^2 = \eta^2 + \zeta^2,$$

essendo f, f_1 funzioni qualunque date degli argomenti rispettivamente indicati.

In ciò che segue ci proponiamo di dimostrare che i problemi del moto d' un punto libero nello spazio, soddisfacenti a tali condizioni, sono tutti e soli quelli pei quali sussiste la funzione di forza:

$$u = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} f\left(\frac{y^2 + z^2}{x^2}\right) + \frac{1}{y^2} f_1\left(\frac{z}{y}\right) + F_1 (x^2 + y^2 + z^2),$$

dove la terza funzione, che comparisce nel secondo membro, è data arbitrariamente, come abbiamo detto delle due altre, ed il suo valore dipende soltanto dalla distanza del punto dall' origine delle coordinate; e dimostreremo eziandio che tutti questi problemi sono riducibili a quadrature.

Tale è il risultato della presente ricerca. Questa è la classe di problemi che forma oggetto dello scritto. Seguendo lo stesso metodo tenuto in questo piccolo lavoro, sarebbe pur agevole indicare anche altre classi di problemi del moto d' un punto libero nello spazio similmente riducibili a quadrature, ma sopra di esse non abbiamo stimato doverci qui fermare.

§ I.

Siano:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \varphi(\eta, \zeta), \qquad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = \psi(\eta, \zeta), \tag{1}$$

ove φ, ψ sono funzioni date di η, ζ, le equazioni differenziali del 2^0 ordine del moto, in un piano, d' un punto materiale, di massa eguale all' unità, sotto l' azione di una forza P dipendente dalla sola posizione del punto. Sia:

$$(2) \left\{ \begin{aligned} &\varphi_1(\eta, \zeta, \eta', \zeta') = c_1, \\ &\varphi_2(\eta, \zeta, \eta', \zeta') = c_2, \\ &\varphi_3(\eta, \zeta, \eta', \zeta') = c_3, \end{aligned} \right.$$

ove c_1, c_2, c_3, sono tre costanti arbitrarie ed ove:

$$\eta' = \frac{d\eta}{dt}, \qquad \zeta' = \frac{d\zeta}{dt},$$

un sistema di tre integrali primi distinti, indipendenti dal tempo, del sistema (1).

Siano d'altra parte:

$$(3) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = X(x, y, z), \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y(x, y, z), \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z(x, y, z)$$

le equazioni differenziali del 2° ordine del moto d'un punto materiale, nello spazio, sotto l'azione d'una forza F dipendente, similmente, dalla sola posizione del mobile.

Supponiamo che i momenti della forza F rispetto a due assi, passanti per un dato punto dello spazio, che assumiamo come origine delle coordinate, siano funzioni date omogenee di grado negativo -2 delle coordinate x, y, z del punto mobile. È evidente che, se tale proprietà si verifica rispetto a due assi qualunque, ortogonali o no fra loro, passanti pel punto dato, si verifica eziandio per qualsivoglia altro asse condotto per lo stesso punto.

Si abbia adunque:

$$(4) \qquad xY - yX = \frac{1}{x^2}\varphi(\eta, \zeta), \qquad xZ - zX = \frac{1}{x^2}\psi(\eta, \zeta),$$

ove:

$$(5) \qquad \eta = \frac{y}{x}, \qquad \zeta = \frac{z}{x}.$$

In tale ipotesi si dedurranno immediatamente dagli integrali (2) del sistema (1) tre fra i cinque integrali primi distinti, indipendenti dal tempo, del sistema (3) e saranno:

$$(6) \qquad \begin{cases} \varphi_1\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, xy' - yx', xz' - zx'\right) = c_1, \\ \varphi_2\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, xy' - yx', xz' - zx'\right) = c_2, \\ \varphi_3\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, xy' - yx', xz' - zx'\right) = c_3. \end{cases}$$

essendo φ_1, φ_2, φ_3 le stesse funzioni che compariscono nei primi membri delle (2), nelle quali, invece di η, ζ, η', ζ', sieno poste rispettivamente le quantità $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{x}$, $xy' - yx'$, $xz' - zx'$.

Di questo teorema che risulta da una memoria del Bertrand (*) e dalla mia tesi di abilitazione (**) e che è il punto di partenza della presente ricerca, può darsi la seguente dimostrazione semplicissima diretta.

Sia:

$$F(x, y, z, x', y', z') = C,$$

ove C è una costante arbitraria, un integrale primo, indipendente dal tempo, comune a tutti gli infiniti sistemi (3) soddisfacenti alle due condizioni (4), intendendosi che le due funzioni $\varphi(\eta, \zeta)$, $\psi(\eta, \zeta)$ siano le stesse per tutti questi infiniti sistemi.

Si avrà:

$$\frac{\partial F}{\partial x} x' + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial z} z' + \frac{\partial F}{\partial x'} X + \frac{\partial F}{\partial y'} Y + \frac{\partial F}{\partial z'} Z = 0,$$

oppure, in virtù delle (4), (5):

$$\frac{\partial F}{\partial x} x' + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial z} z' + \frac{\partial F}{\partial x'} X + \frac{\partial F}{\partial y'} \left(\frac{y}{x} X + \frac{1}{x^3} \varphi \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right) \right)$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial z'} \left(\frac{z}{x} X + \frac{1}{x^3} \psi \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x} \right) \right) = 0.$$

È manifesto che quest'equazione deve essere soddisfatta qualunque sia X, e che perciò dovrà scindersi nelle due seguenti:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x'} + \dfrac{\partial F}{\partial y'} \dfrac{y}{x} + \dfrac{\partial F}{\partial z'} \dfrac{z}{x} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial x} x' + \dfrac{\partial F}{\partial y} y' + \dfrac{\partial F}{\partial z} z' + \dfrac{\partial F}{\partial y'} \dfrac{1}{x^3} \varphi \left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x} \right) + \dfrac{\partial F}{\partial z'} \dfrac{1}{x^3} \psi \left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x} \right) = 0. \end{cases}$$

(*) *Sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de mécanique*: Journ. de Mathématiques pures et appliquées, publié par J. Liouville, t. XVII, anno 1852.

(**) *Sugl' integrali comuni a più problemi di Dinamica*. Ann. R. Scuola Norm. Sup. di Pisa, Vol. 4.

Se, invece delle x, y, z, x', y', z', si assumono come variabili x, η, ζ, x', y', z', è facile vedere che questo sistema si trasformerà nel seguente:

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x'} + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta + \frac{\partial F}{\partial z'}\zeta = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial x}x' + \frac{\partial F}{\partial \eta}\frac{y' - \eta x'}{x} + \frac{\partial F}{\partial \zeta}\frac{z' - \zeta x'}{x} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\varphi(\eta,\zeta)}{x^3} + \frac{\partial F}{\partial z'}\frac{\psi(\eta,\zeta)}{x^3} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Avendosi della prima equazione di questo sistema le soluzioni:

$$
(8)\qquad x(y' - \eta x') = \lambda, \qquad x(z' - \zeta x') = \mu,
$$

si potrà porre:

$$
F = F(x, \eta, \zeta, \lambda, \mu)
$$

Se perciò, invece delle variabili x, η, ζ, x', y', z', si prendono le variabili x, η, ζ, x', λ, μ, il sistema (7) si trasforma nel seguente:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x'} = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial x}x' + \frac{1}{x^2}\left[\frac{\partial F}{\partial \eta}\lambda + \frac{\partial F}{\partial \zeta}\mu + \frac{\partial F}{\partial \lambda}\varphi(\eta,\zeta) + \frac{\partial F}{\partial \mu}\psi(\eta,\zeta)\right] = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Da tal sistema si deduce che F è una funzione delle sole quattro variabili η, ζ, λ, μ soddisfacente all'unica equazione:

$$
\lambda\frac{\partial F}{\partial \eta} + \mu\frac{\partial F}{\partial \zeta} + \varphi(\eta,\zeta)\frac{\partial F}{\partial \lambda} + \psi(\eta,\zeta)\frac{\partial F}{\partial \mu} = 0.
$$

Si paragoni quest'equazione colla seguente:

$$
\eta'\frac{\partial F}{\partial \eta} + \zeta'\frac{\partial F}{\partial \zeta} + \varphi(\eta,\zeta)\frac{\partial F}{\partial \eta'} + \psi(\eta,\zeta)\frac{\partial F}{\partial \zeta'} = 0,
$$

la quale è identicamente soddisfatta qualunque siano $\eta, \zeta, \eta', \zeta'$ se l'equazione:

$$F(\eta, \zeta, \eta', \zeta') = cost.$$

è un integrale primo, indipendente dal tempo, del sistema (1).

Poichè dalle (5), (8) si deduce:

$$\lambda = xy' - x'y, \qquad \mu = xz' - x'z,$$

da tal confronto rimane dimostrata la proprietà sopra enunciata, che cioè, nell'ipotesi (4), i tre integrali primi distinti, indipendenti dal tempo, del sistema (1) offrono subito tre fra i cinque integrali primi distinti, indipendenti dal tempo del sistema (3) col sostituire in quelli $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, xy' - x'y, xz' - x'z$ al posto di $\eta, \zeta, \eta', \zeta'$.

È notevole che da tale proprietà si trae immediatamente che, se:

$$\varphi_0(\eta, \zeta, c_1, c_2, c_3) = 0$$

è l'equazione della traiettoria nel problema del moto nel piano, sarà:

$$\varphi_0\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, c_1, c_2, c_3\right) = 0$$

l'equazione di una superficie conica, sulla quale resterà costantemente il punto materiale, libero nello spazio, sotto l'azione della forza *F*. È quasi superfluo aggiungere che il primo membro dell'ultima equazione si otterrà dal primo membro della penultima, sostituendo le quantità $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}$, al posto di η, ζ rispettivamente, e conservando la intera arbitrarietà a tutte e tre le costanti distinte c_1, c_2, c_3.

§ II.

Pel problema del piano, in confronto del moto rettilineo, vale, come osservò il Bertrand, un teorema analogo.

E infatti, se il momento della forza P, di componenti φ, ψ, rispetto all' origine, è una funzione omogenea di grado negativo -2 delle coordinate η, ζ, in guisa che si abbia:

$$\eta\psi - \zeta\varphi = -\frac{1}{\eta^2} f'\left(\frac{\zeta}{\eta}\right), \tag{9}$$

ove f' è la derivata della funzione f dell' unico argomento $\frac{\zeta}{\eta}$ rispetto all' argomento stesso, il problema del piano, denotando con c una costante arbitraria, ammetterà l' integrale primo:

$$(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2 + 2f\left(\frac{\zeta}{\eta}\right) = c, \tag{10}$$

come può verificarsi. Ma si verifica altresì che l' integrale primo (10), indipendente dal tempo, del sistema (1) si può trarre appunto dall' integrale primo, indipendente dal tempo, dell' equazione:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -f'(\xi)$$

colla sostituzione di $\frac{\zeta}{\eta}$, $\eta\zeta' - \eta'\zeta$, al posto di ξ, $\frac{d\xi}{dt}$ rispettivamente. È evidente che tale corrispondenza ha analogia con quella dimostrata nel § I, ciò che costituisce la proprietà a cui abbiamo alluso in principio di questo paragrafo.

Ciò premesso, supponiamo che le due funzioni φ, ψ soddisfacciano alla (9), ove f sia una funzione data dell' argomento $\frac{\zeta}{\eta}$ e f' sia, come si è detto, la derivata di tal funzione rispetto

a questo argomento. Il sistema (1) ammetterà l'integrale primo (10). Supponiamo di più che lo stesso sistema (1) ammetta l'integrale delle forze vive:

$$\frac{1}{2}(\eta'^2 + \zeta'^2) - r(\eta, \zeta) = h. \tag{11}$$

Ciò è manifestamente possibile, e, data la funzione f che figura nella (9), la determinazione della funzione di forza $r(\eta, \zeta)$ dipende da una quadratura. Il problema del piano è in tal caso ridotto a quadrature.

Se allora del sistema (3) si conosce un integrale primo, indipendente dal tempo, il quale non sia uno dei tre integrali primi distinti, indipendenti dal tempo, comuni a tutti i singoli problemi della classe caratterizzata dalle equazioni (4), dalle relazioni $\varphi = \frac{\partial r}{\partial \eta}$, $\psi = \frac{\partial r}{\partial \zeta}$ e dalla funzione $r(\eta, \zeta)$ ora determinata, il problema del moto del punto nello spazio sarà riducibile a quadrature.

Resta di vedere come si possa approfittare delle precedenti osservazioni per dimostrare il teorema che mi sono proposto nella introduzione di questa Nota.

§ III.

A tale scopo ricerchiamo intanto la condizione necessaria e sufficiente, a cui devono soddisfare le due componenti φ, ψ della forza P, nel problema del piano, affinchè la forza F, di componenti X, Y, Z, nell'ipotesi (4), ammetta una funzione di forza u.

Supposta l'esistenza di tale funzione, le (4) diventeranno:

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^3}\,\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{z}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^3}\,\psi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

ovvero, prendendovi, secondo le (5), come variabili indipendenti x, η, ζ invece di x, y, z:

$$-\eta\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\eta^2+1}{x}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{\eta\zeta}{x}\frac{\partial u}{\partial \zeta}=\frac{1}{x^3}\varphi(\eta,\zeta).$$

$$-\zeta\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\eta\zeta}{x}\frac{\partial u}{\partial \eta}+\frac{\zeta^2+1}{x}\frac{\partial u}{\partial \zeta}=\frac{1}{x^3}\psi(\eta,\zeta).$$

Supponendo che la funzione di forza u sia determinata, a meno di una costante additiva, dall' equazione:

$$F(x,\eta,\zeta,u)=0,$$

le due equazioni precedenti, a derivate parziali lineari di 1° ordine non omogenee, si trasformeranno nelle due seguenti omogenee:

$$(12)\qquad -\eta x^3\frac{\partial F}{\partial x}+(\eta^2+1)\,x^2\frac{\partial F}{\partial \eta}+\eta\zeta x^2\frac{\partial F}{\partial \zeta}+\varphi(\eta,\zeta)\frac{\partial F}{\partial u}=0.$$

$$(13)\qquad -\zeta x^3\frac{\partial F}{\partial x}+\eta\zeta x^2\frac{\partial F}{\partial \eta}+(\eta^2+1)\,x^2\frac{\partial F}{\partial \zeta}+\psi(\eta,\zeta)\frac{\partial F}{\partial u}=0.$$

i cui primi membri rappresenteremo brevemente con $A(F)$, $B(F)$.

Si avrà identicamente:

$$A(B(F))-B(A(F))=$$

$$x^2\left\{3x^2\left(\zeta\frac{\partial F}{\partial \eta}-\eta\frac{\partial F}{\partial \zeta}\right)+\left[(\eta^2+1)\frac{\partial \psi}{\partial \eta}+\eta\zeta\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}-(\zeta^2+1)\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}-\eta\zeta\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right]\frac{\partial F}{\partial u}\right\}=0.$$

Si verifica che si ha pure identicamente:

$$3\zeta A(F)-3\eta B(F)=3x^2\left(\zeta\frac{\partial F}{\partial \eta}-\eta\frac{\partial F}{\partial \zeta}\right)+3(\zeta\varphi-\eta\psi)\frac{\partial F}{\partial \eta}=0.$$

Se indi da queste due equazioni si elimina la quantità $3x^2(\zeta \frac{\partial F}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial F}{\partial \zeta})$ e poi l'equazione risultante si divide per $x^2 \frac{\partial F}{du}$, si avrà:

$$(14) \qquad 3(\eta\psi - \zeta\varphi) + (\eta^2 + 1)\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \eta\zeta \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} - (\zeta^2 + 1)\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} - \eta\zeta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0.$$

È questa la condizione necessaria e sufficiente, affinchè coesistano le due equazioni (12), (13), cioè affinchè ammettano due soluzioni comuni distinte dalla soluzione identica evidente F=cost. La (14) è pure la condizione necessaria e sufficiente, affinchè il sistema (12), (13) sia Jacobiano. La stessa (14) è finalmente altresì la condizione necessaria e sufficiente, a cui devono soddisfare le due componenti φ, ψ della forza P, nel problema del piano, affinchè la forza F, di componenti X, Y, Z, nell'ipotesi (4), ammetta una funzione di forza u.

§ IV.

Si giungerà infine alla dimostrazione del teorema enunciato nella introduzione, ricercando la condizione, per cui la forza P, di componenti φ (η, ζ), ψ (η, ζ), nel problema del piano, e la forza F, di componenti X (x, y, z), Y (x, y, z), Z (x, y, z), nel problema dello spazio, nell'ipotesi (4), provengano, simultaneamente e rispettivamente, da funzioni di forza u (η, ζ), v (x, y, z).

Supposto che ciò si verifichi, potremo porre:

$$(15) \qquad \varphi(\eta, \zeta) = \frac{\partial v}{\partial \eta}, \qquad \psi(\eta, \zeta) = \frac{\partial v}{\partial \zeta}$$

nella equazione (14), la quale diventerà:

$$(16) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \, \partial \zeta}(\eta^2 - \zeta^2) + \eta\zeta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\right) + 3(\eta \frac{\partial v}{\partial \zeta} - \zeta \frac{\partial v}{\partial \eta}) = 0.$$

Volendo cambiare in quest' equazione differenziale parziale lineare del 2° ordine, colla trasformazione di Eulero, le due variabili indipendenti η, ζ, in modo che, nella equazione trasformata, siano nulli i coefficienti di due delle tre derivate seconde rispetto alle nuove variabili η_1 ζ_1, si trova che ciò può ottenersi colla trasformazione:

$$\eta^2 + \zeta^2 = \eta_1, \qquad \frac{\zeta}{\eta} = \zeta_1.$$

Si giungerà allora alla equazione trasformata semplicissima seguente:

$$\eta_1 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta_1 \partial \zeta_1} + \frac{\partial v}{\partial \zeta_1} = 0,$$

onde:

$$v = f(\eta_1) + \frac{f_0(\zeta_1)}{\eta_1}$$

ovvero:

$$v = f(\eta^2 + \zeta^2) + \frac{1}{\eta^2} \frac{f_0\left(\frac{\zeta}{\eta}\right)}{1 + \left(\frac{\zeta}{\eta}\right)^2}.$$

Questo risultato è della forma:

$$v = f(\eta^2 + \zeta^2) + \frac{1}{\eta^2} f_1\left(\frac{\zeta}{\eta}\right), \tag{17}$$

quale si è dato nella introduzione, e costituisce l' integrale generale della equazione differenziale parziale lineare (16) a due variabili indipendenti η, ζ.

La funzione di forza v, nel problema del piano, è allora la somma di una funzione della distanza del punto mobile dall' origine delle coordinate nel piano e di una funzione omogenea

di grado negativo—2 delle coordinate η, ζ del punto, sicchè il punto mobile nel piano può considerarsi soggetto a una forza diretta costantemente verso l'origine e funzione della distanza e ad un'altra forza che ammette una funzione di forza omogenea di grado negativo—2.

Nell'ipotesi delle (15), (17) si ha poi sviluppando:

$$\zeta \frac{\partial v}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial v}{\partial \zeta} = - \frac{1}{\eta^2} f_2 \left(\frac{\zeta}{\eta}\right), \tag{18}$$

ove:

$$f_2 \left(\frac{\zeta}{\eta}\right) = 2 \frac{\zeta}{\eta} f_1 \left(\frac{\zeta}{\eta}\right) + \left(1 + \frac{\zeta^2}{\eta^2}\right) f'_1 \left(\frac{\zeta}{\eta}\right), \tag{19}$$

o ciò che è lo stesso:

$$\zeta \frac{\partial v}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial v}{\partial \zeta} = - \frac{1}{\eta^2} f'_3 \left(\frac{\zeta}{\eta}\right). \tag{20}$$

ove:

$$f_3 \left(\frac{\zeta}{\eta}\right) = \left[1 + \left(\frac{\zeta}{\eta}\right)^2 \right] f_1 \left(\frac{\zeta}{\eta}\right), \tag{21}$$

cioè il momento della forza P, rispetto all'origine, nel problema del piano, è una funzione omogenea di grado — 2 delle coordinate.

§ V.

Passiamo ora ad integrare il sistema delle due equazioni differenziali parziali di prim' ordine lineari omogenee (12), (13) colle condizioni (15), (17), le quali, per quanto si è detto, non sono necessarie, ma però sono sufficienti perchè il sistema stesso sia Jacobiano.

A tal fine dalle (12) e (13) elimino $\frac{\partial F}{\partial x}$, ho presenti le (15) e (20) e pongo per brevità:

$$\frac{\zeta}{\eta_1} = \alpha . \tag{22}$$

Dovrò integrare il sistema Jacobiano:

$$\left\{ \begin{aligned} & x^2 \left(\zeta \frac{\partial F}{\partial \eta_1} - \eta_1 \frac{\partial F}{\partial \zeta}\right) - \frac{1}{\eta_1^2} f'_3 (\alpha) \frac{\partial F}{\partial u} = 0 , \\ & -\eta_1 x^3 \frac{\partial F}{\partial x} + (1 + \eta_1^2) x^2 \frac{\partial F}{\partial \eta_1} + \eta_1 \zeta x^2 \frac{\partial F}{\partial \zeta} + \varphi(\eta_1, \zeta) \frac{\partial F}{\partial u} = 0 , \end{aligned} \right.$$

ove, per le (21) e (22), è:

$$f_3 (\alpha) = (1 + \alpha^2) f_1 (\alpha) . \tag{23}$$

Questo sistema, trasformato mediante la (22), dalle variabili u, x, η_1, ζ alle variabili u, x, η_1, α diviene:

$$\left\{ \begin{aligned} & x^2 \left[\alpha \eta_1 \frac{\partial F}{\partial \eta_1} - (1 + \alpha^2) \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right] - \frac{1}{\eta_1} f'_3 (\alpha) \frac{\partial F}{\partial u} = 0 , \\ & -\eta_1 x^3 \frac{\partial F}{\partial x} + x^2 (1 + \eta_1^2) \frac{\partial F}{\partial \eta_1} - \frac{x^2 \alpha}{\eta_1} \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \varphi \frac{\partial F}{\partial u} = 0 , \end{aligned} \right. \tag{24}$$

dove, dapprima per le (18), (20), (22), (23), è:

$$f_3' (\alpha) = f_2 (\alpha) = (1 + \alpha^2) f_1' (\alpha) + 2\alpha f_1 (\alpha) , \tag{25}$$

poi, per la prima delle (15), per la (17) e per la (22), si troverà essere:

$$\varphi = 2\eta_1 f' (\eta_1^2 (1 + \alpha^2)) - \frac{2}{\eta_1^3} f_1 (\alpha) - \frac{\alpha}{\eta_1^3} f_1' (\alpha) . \tag{26}$$

Della prima equazione del sistema Jacobiano (24), tenendo conto della (25), si hanno le due soluzioni:

$$u - \frac{f_1 (\alpha)}{x^2 \eta_1^2} = w , \qquad \eta_1^2 (1 + \alpha^2) = \sigma , \tag{27}$$

sicchè si può porre:

$$F = F(x, \sigma, w).$$

Mediante le due relazioni (27), assumo come variabili indipendenti η, x, σ, w, invece di η, x, α, u, con che, facendo i consueti calcoli, la seconda equazione del sistema Jacobiano (24) diviene:

$$x^3 \frac{\partial F}{\partial x} - 2x^2(1+\sigma)\frac{\partial F}{\partial \sigma} - 2f'(\sigma)\frac{\partial F}{\partial w} = 0,$$

nella quale ora F è funzione delle tre sole variabili x, σ, w.

Di quest' equazione si hanno le soluzioni:

$$(28) \qquad (1+\sigma)x^2 = \beta, \qquad w - \frac{f(\sigma)}{(1+\sigma)x^2} = \gamma,$$

oltre la soluzione identica:

$$F = cost.$$

Onde l' equazione, che serve a determinare la funzione di forza u, è:

$$F(\beta, \gamma) = 0$$

ovvero:

$$\gamma = F_1(\beta),$$

da cui, eseguendo, per mezzo delle (28), (27), (22), le trasformazioni inverse, per ritornare alle variabili x, η, ζ, u, si troverà facilmente la seguente espressione generale della funzione di forza u:

$$(29) \quad u = \frac{1}{x^2\eta^2} f_1\left(\frac{\zeta}{\eta}\right) + \frac{1}{x^2(1+\eta^2+\zeta^2)} f(\eta^2+\zeta^2) + F_1\left(x^2(1+\eta^2+\zeta^2)\right).$$

Si verifica facilmente che la funzione:

$$F = \frac{1}{x^2\eta^2} f_1\left(\frac{\zeta}{\eta}\right) + \frac{1}{x^2(1+\eta^2+\zeta^2)} f(\eta^2+\zeta^2) + F_1\left(x^2(1+\eta^2+\zeta^2)\right) - u,$$

quando le quattro quantità x, η, ζ, u, vi si considerino come

variabili indipendenti, soddisfa al sistema (12), (13), ove, secondo le (26), (22), la prima delle (15) e la (17), siano fatte le posizioni:

$$\varphi = 2\eta f'(\eta^2 + \zeta^2) - \frac{2}{\eta^3} f_1\left(\frac{\zeta}{\eta}\right) - \frac{\zeta}{\eta^4} f_1'\left(\frac{\zeta}{\eta}\right),$$

$$\psi = 2\eta f'(\eta^2 + \zeta^2) + \frac{1}{\eta^3} f_1'\left(\frac{\zeta}{\eta}\right),$$

le quali, per ciò che precede, rendono Jacobiano il sistema stesso.

Per le posizioni (5), la espressione generale (29) della funzione di forza u assume anche la forma:

$$u = \frac{1}{y^2} f_1\left(\frac{z}{y}\right) + \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} f\left(\frac{y^2 + z^2}{x^2}\right) + F_1(x^2 + y^2 + z^2), \tag{30}$$

già data nella introduzione di questo lavoro.

§ VI.

Tutto ciò, che si è detto sin qui, si riassume dicendo: 1° che i problemi del moto d' un punto libero nello spazio, indicati in principio di questa Nota, sono tutti e soli quelli pei quali la funzione di forza u è contenuta nella formula generale (30); 2° che tutti questi problemi sono riducibili a quadrature.

Un integrale di tali problemi è dapprima quello delle forze vive:

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) - u = k, \tag{A}$$

ove u è la espressione (30) e k la costante arbitraria.

Avendosi poi le (18), (19), si conclude, dal teorema espresso dalle (9), (10), che un integrale primo del problema del moto nel piano è:

$$(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2 + 2\left(1 + \frac{\zeta^2}{\eta^2}\right) f_1\left(\frac{\zeta}{\eta}\right) = c. \tag{31}$$

Perciò, in virtù della corrispondenza che abbiamo espresso

colle (2), (6), e che abbiamo dimostrato nel § 11, un altro integrale primo dei problemi del moto libero nello spazio è:

$$(B) \qquad (yz' - zy')^2 + 2\left(1 + \frac{z^2}{y^2}\right) f_1 \left(\frac{z}{y}\right) = c\,.$$

essendo c la costante arbitraria.

Il problema del moto nel piano ammette anche l' integrale delle forze vive (11), nel quale r è la espressione (17); quindi, in virtù della ora accennata corrispondenza, il problema del moto del punto libero nello spazio ammette, oltre i due integrali primi trovati (A) e (B), anche l' integrale primo seguente:

$$(C) \qquad \frac{1}{2}\left[(xy' - yx')^2 + (xz' - zx')^2 \right] - f\left(\frac{y^2 + z^2}{x^2}\right) - \frac{x^2}{y^2} f_1 \left(\frac{z}{y}\right) = h\,,$$

ove h è la costante arbitraria.

Finalmente dai due integrali primi indipendenti dal tempo (11), (31) del problema del moto nel piano si deduce, con quadrature, secondo la teoria del moltiplicatore di Jacobi, un terzo integrale indipendente dal tempo, pure del problema nel piano, e da quest' ultimo integrale si dedurrà, servendosi di nuovo della corrispondenza spiegata nel § 11, un quarto integrale, parimenti indipendente dal tempo, pel problema nello spazio.

Si conosce così un sistema di quattro integrali primi distinti, indipendenti dal tempo, cioè (A), (B), (C) e il quarto ora detto, pei problemi del moto nello spazio, definiti dalla funzione di forza (30), sicchè, il teorema, enunciato nella introduzione del presente lavoro, ne scaturisce, senz'altro, applicando una seconda volta la teoria del moltiplicatore di Jacobi.

Catania, 25 luglio 1904.

INDICE

S. di Franco dis.

Stab. Litog. L. Ronchi-Milano

S. di Franco dis. Stab. Litog. L. Ronchi-Milano

Fig. 1.

Fig. 8.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 2.

Fig. 5.

Fig. 4.

Fig. 3.

F. Cavara, fotogr. Fototipia E. Calzone - Roma.

Fig. 1. Eruzioni di fumo dai crateri, viste da ovest.

Fig. 2. Canale di lava, visto da ovest.

Fig. 3. Apparato eruttivo, visto da Monte Nero, cioè da sud.

Fig. 4. Bocche di lava, viste da Monte Nero.

N

Fig. 1. Fumarole fra i crateri N ed A, viste da est.

Fig. 2. Grande eruzione della bocca B′, vista da est.

Fig. 3. Grande fumarola F e cratere N, visti da sud.

Fig. 4. Grande masso lanciato a 300 m. ovest dei coni meridionali.

B

Fig. 1. Apparecchio eruttivo visto dalla cima settentrionale di M.te Nero.

Fig. 2. Cratere settentrionale N in piena attività, visto da S-SW.

Fig. 3. Interno del cono avventizio A, visto da Nord.

Fig. 4. Bocca di fuoco, vista da W.

Tav. VI.